

## CAPITOLO 11

# INTRODUZIONE AI FILTRI ANALOGICI

### 11.1 Generalità sui filtri analogici

Il legame ingresso-uscita di un circuito lineare tempo-invariante e dissipativo mette in evidenza che essi possono comportarsi come sistemi selettivi in frequenza. Grazie alla dipendenza funzionale della  $H(i\omega)$  dalla frequenza, alcune componenti frequenziali dell'ingresso sono soppresse mentre altre restano inalterate: tale proprietà viene denominata capacità di filtraggio, e viene utilizzata, in fase di progetto, per separare un "segnale voluto" a partire da una miscela di "segnale voluto" e uno o più "segnali non voluti" (ad esempio, disturbi, rumore).

Nel seguito viene considerato il caso più semplice, ma abbastanza comune, che segnale voluto e non voluto non si sovrappongano in frequenza, per cui l'operazione di filtraggio idealmente si riduce a far passare in maniera indisturbata il segnale voluto e nel sopprimere completamente il non voluto. Ciò si ottiene con i filtri ideali di figura 1, classificati sulla base dell'intervallo di frequenze (useremo spesso la frequenza  $f$  invece della pulsazione  $\omega=2\pi f$ ), all'interno del quale il filtro agisce come sistema non distortore (**banda passante**) in "passa-basso" (**LPF** sta per "low pass filter"), "passa-banda" (**BPF** sta per "band pass filter"), "passa-alto" (**HPF** sta per "high pass filter") e "taglia-banda" (**RBF** sta per "reject band filter").

#### 11.1.1 Filtri ideali

Le caratteristiche di un filtro ideale sono:

- (a) *risposta in ampiezza costante in **banda passante** e nulla al di fuori, nella **banda oscura**;*
- (b) *fase lineare nella banda passante;*
- (c) *transizione brusca dalla banda passante a quella oscura.*

Il filtro passa-basso ideale e il filtro passa-alto ideale sono caratterizzati dalla frequenza di taglio  $f_t$ : la banda passante del filtro passa-basso ideale è l'intervallo  $(0, f_t)$ , mentre quella del filtro passa-alto è l'intervallo  $(f_t, \infty)$ . Il filtro passa-banda ideale e il filtro taglia-banda ideale sono caratterizzati dalla frequenza di taglio inferiore  $f_1$  e da quella superiore  $f_2$ : la banda passante del filtro passa-

banda ideale è l'intervallo  $(f_1, f_2)$ , mentre quella del filtro taglia-banda è l'intervallo  $(0, f_1) \cup (f_2, \infty)$ . La banda oscura è l'insieme delle frequenze complementare all'insieme che definisce la banda passante.

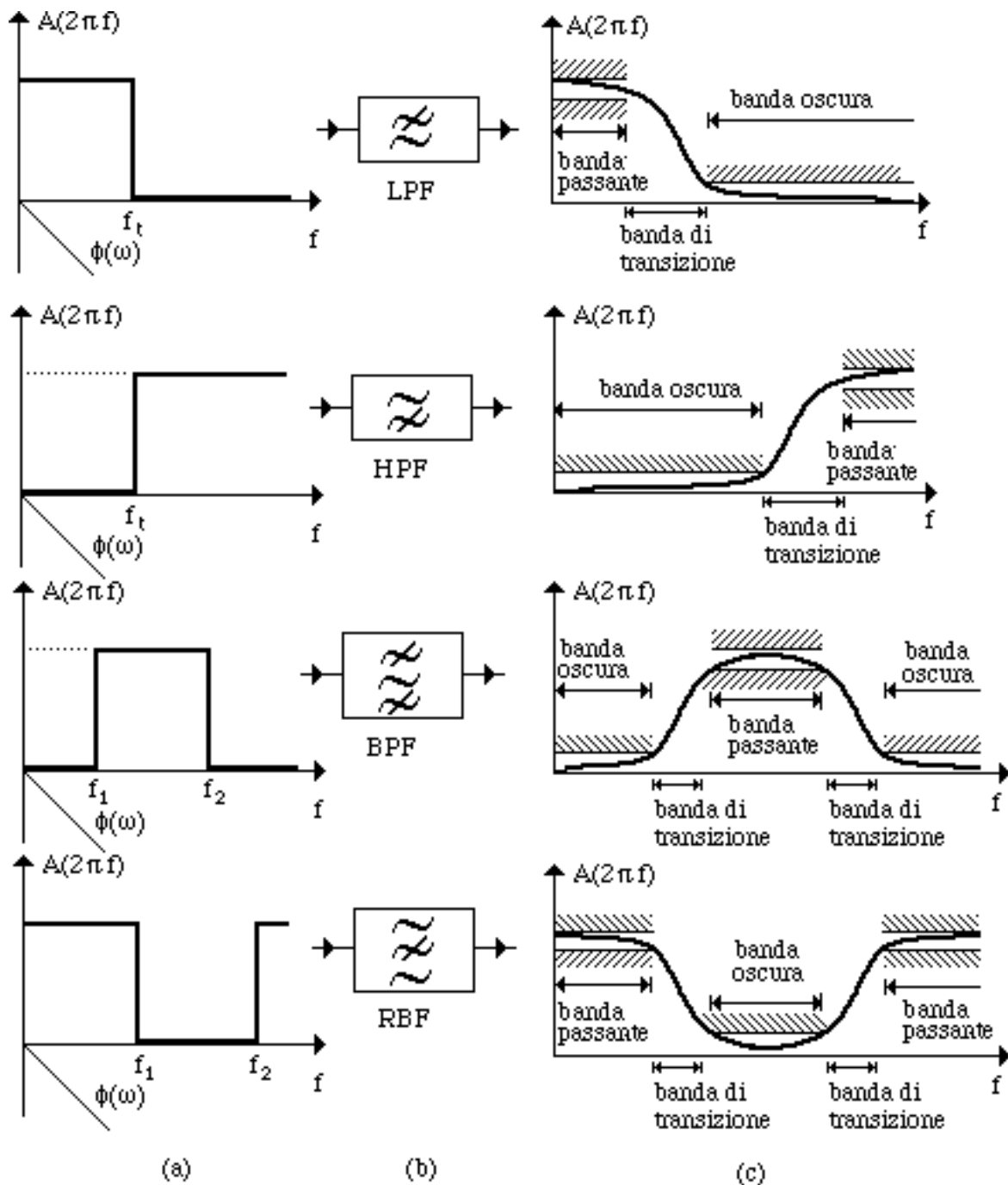


Figura 1 Risposta in ampiezza e fase dei filtri ideali (a), simboli dei filtri ideali (b) e risposta in ampiezza dei filtri reali (c).

### Osservazione

Prima di proseguire, merita un approfondimento la specifica riguardante l'andamento della fase nella banda passante. Si consideri un segnale costituito da tre funzioni sinusoidali:

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t) + X_a \cos(2\pi f_a t) + X_b \cos(2\pi f_b t), \quad (1)$$

e si supponga che

$$x_n(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t), \quad (2)$$

sia il segnale indesiderato presente nel sistema fisico di interesse. Il “segnale voluto” è:

$$\tilde{x}(t) = X_a \cos(2\pi f_a t) + X_b \cos(2\pi f_b t). \quad (3)$$

Si assuma che  $f_0 > f_b > f_a$ . Essendo la risposta in ampiezza del filtro passa-basso ideale

$$A(2\pi f) = \begin{cases} 1 & 0 < f < f_t, \\ 0 & f_t < f, \end{cases} \quad (4)$$

il “segnale non voluto” può essere eliminato usando un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio  $f_t$  tale che:

$$f_a < f_b < f_t < f_0. \quad (5)$$

(Quando  $f_a \approx f_b$  e  $f_a \gg (f_b - f_a)$  è conveniente usare un filtro passa-banda piuttosto che uno passa-basso).

La (5) garantisce che il “segnale non voluto” non è presente in uscita. Essa garantisce, anche, che il “segnale voluto” sia restituito senza alterazioni? Le uniche alterazioni ammissibili sono: (a) modifica dell'ampiezza del “segnale voluto” nel suo complesso, senza alterarne la forma; (b) un ritardo dell'intero segnale, possibilmente riducendolo al minimo necessario. Pertanto, l'uscita  $u(t)$  del filtro deve valere:

$$u(t) = k\tilde{x}(t - \tau_r), \quad (6)$$

dove  $k$  e  $\tau_r$  sono due costanti (deve essere  $\tau_r > 0$  perché i circuiti sono sistemi causali):  $k$  descrive l'attenuazione ( $|k| \leq 1$ ) o l'amplificazione ( $|k| > 1$ ) del segnale voluto (nel suo complesso) e  $\tau_r$  il ritardo.

Usando la risposta in frequenza del filtro passa-basso ideale, si ha per  $u(t)$

$$u(t) = X_a \cos[2\pi f_a t + \phi(2\pi f_a)] + X_b \cos[2\pi f_b t + \phi(2\pi f_b)]. \quad (7)$$

La (7) verifica la condizione (6) solo se:

$$\begin{aligned} \phi(2\pi f_a) &= -2\pi\tau_r f_a, \\ \phi(2\pi f_b) &= -2\pi\tau_r f_b, \end{aligned} \quad (8)$$

cioè se la risposta in fase  $\phi(2\pi f)$  è del tipo

$$\phi(2\pi f) = -2\pi\tau_r f. \quad (9)$$

In questo caso si ha

$$u(t) = X_a \cos[2\pi f_a (t - \tau_r)] + X_b \cos[2\pi f_b (t - \tau_r)] = \tilde{x}(t - \tau_r). \quad (10)$$

Se fosse:

$$\tau_a = -\frac{\phi(2\pi f_a)}{2\pi f_a} \neq \tau_b = -\frac{\phi(2\pi f_b)}{2\pi f_b}, \quad (11)$$

si avrebbe:

$$u(t) = X_a \cos[2\pi f_a(t - \tau_a)] + X_b \cos[2\pi f_b(t - \tau_b)], \quad (12)$$

e il segnale in uscita avrebbe una forma diversa da quello in ingresso perché ogni armonica avrebbe un ritardo temporale diverso dal ritardo delle altre. Solo se la risposta in fase è lineare, la forma d'onda del “segnale voluto” non è distorta, ma è semplicemente ritardata.

### 11.1.2 Condizioni di fisica realizzabilità e filtri reali

È immediato constatare che i filtri ideali non sono realizzabili con i circuiti dissipativi a parametri concentrati fin qui analizzati. Ricordiamo che la funzione di trasferimento  $H(s)$  (o di rete) di un circuito dissipativo a parametri concentrati ha le seguenti caratteristiche:

- (a)  $H(s)$  è una funzione razionale di  $s$  a coefficienti reali, cioè esprimibile tramite il rapporto di due polinomi a coefficienti reali;
- (b) i poli di  $H(s)$  sono tutti a parte reale minore di zero.

Da queste proprietà si ha che  $H(s)$  è analitica sull'asse immaginario, e quindi la risposta in ampiezza deve essere una funzione continua di  $\omega$ , ovvero di  $2\pi f$ . Pertanto non ci può essere una transizione brusca tra la banda passante e la banda oscura. Inoltre la risposta in ampiezza non può essere uguale a zero in un intervallo di frequenze di ampiezza non nulla, altrimenti non sarebbe verificata la condizione di Paley-Wiener.

Con le reti elettriche è possibile realizzare filtri che possono solo approssimare quelli ideali (**filtri reali**, figura 1c). Essi sono caratterizzati dall'avere:

- (i) una risposta in ampiezza e derivata della fase (rispetto alla frequenza) in banda passante compresi entro margini prefissati;
- (ii) una risposta in ampiezza inferiore ad un prefissato minimo in banda oscura;
- (iii) una transizione tra banda passante e banda oscura che impegna uno o più intervalli di frequenza di ampiezza non nulla (bande di transizione).

#### Osservazione

In generale le specifiche sulla risposta in ampiezza e in fase non possono essere assegnate indipendentemente, dato che per potere essere realizzati tramite un circuito a parametri concentrati devono essere, rispettivamente, il modulo e la fase di una funzione espressa attraverso un rapporto di polinomi a coefficienti reali. Nel seguito vengono considerate solo le specifiche sulla risposta in ampiezza, che è il caso di maggior interesse. Qualora il profilo della fase del circuito progettato in base alle sole specifiche sull'ampiezza non sia soddisfacente, sarà necessario correggerlo ricorrendo a opportuni circuiti (su questa problematica si ritornerà in seguito).

L'assegnazione delle specifiche, che costituisce il primo passo della sintesi, può essere fatta graficamente dando la cosiddetta “maschera” che fissa i margini entro cui approssimare il filtro ideale.

In figura 2 è illustrata la “maschera” di riferimento per un filtro passa-basso: precisamente in figura 2a è illustrata l'andamento della risposta in ampiezza  $A(\omega)$  (la risposta in ampiezza è normalizzata in modo tale che il suo valore massimo sia uguale a 1), e in figura 2b viene illustrata l'andamento della funzione attenuazione così definita:

$$\alpha(f) = 20 \log \left( \frac{1}{A(2\pi f)} \right) = -20 \log A(2\pi f) = -10 \log [A^2(2\pi f)]. \quad (13)$$

Le specifiche sono date assegnando le frequenze estreme della banda passante e della banda oscura, nonché i margini entro cui deve essere compresa l'attenuazione in ogni banda. Per il filtro passa-basso occorre assegnare i seguenti parametri:

- $f_p$       frequenza di taglio della bande passante;
- $f_s$       frequenza di taglio della banda oscura;
- $\alpha_p$      massima attenuazione (in dB) nella banda passante;
- $\alpha_s$      minima attenuazione (in dB) nella banda oscura.

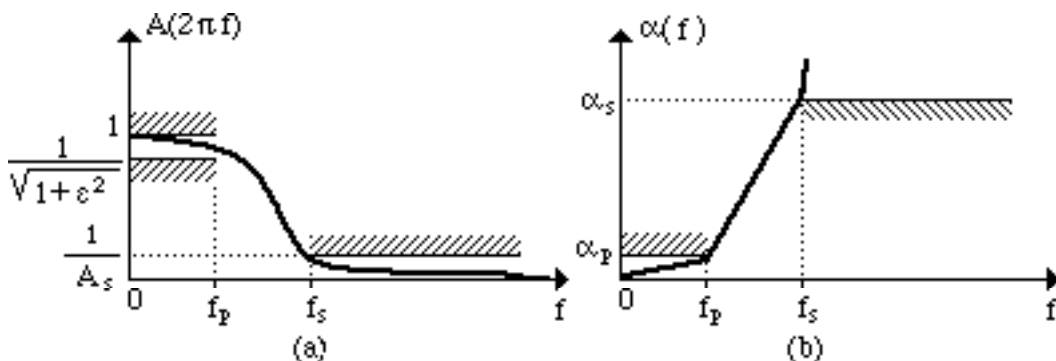


Figura 2 “Maschera” di un filtro passa basso reale: risposta in ampiezza (a) e funzione di attenuazione (b).

Il parametro  $\kappa_{L\text{PF}} \equiv f_s / f_p$  prende il nome di *rapporto di transizione* del filtro passa-basso reale ed è sempre maggiore di uno. Alla massima attenuazione nella banda passante corrisponde il parametro  $\varepsilon^2$  nella maschera per  $A(\omega)$ :  $\varepsilon^2$  è la misura del massimo scostamento ammissibile, in banda passante, dalla risposta in ampiezza del filtro ideale. Invece, alla minima attenuazione nella banda oscura corrisponde il parametro  $1 / A_s$ :  $1 / A_s$  è il massimo valore ammissibile della risposta in ampiezza nella banda oscura. Nel filtro passa-basso ideale è  $f_s = f_p = f_f$ ,  $\alpha_p = 0$ ,  $\alpha_s = \infty$ .

La maschera per la funzione attenuazione di un filtro passa-alto è caratterizzata da grandezze simili: in questo caso il rapporto di transizione è definito come  $\kappa_{H\text{PF}} \equiv f_p / f_s$  ed è maggiore di uno. Invece per la maschera di un filtro passa-banda (o taglia-banda) oltre alla massima attenuazione in banda passante e a quella minima in banda oscura, bisogna assegnare le due frequenze estreme  $f_{1p}$  e  $f_{2p}$  ( $f_{1p} < f_{2p}$ ) della banda passante e le due frequenze estreme  $f_{1s}$  e  $f_{2s}$  ( $f_{1s} < f_{2s}$ ) della

banda oscura. In questo caso il rapporto di transizione è definito come  $\kappa_{\text{BPF}} = (f_{2s} - f_{1s}) / (f_{2p} - f_{1p})$  ed è maggiore di uno. Per il filtro taglia-banda il rapporto di transizione è definito come  $\kappa_{\text{RBF}} = (f_{2p} - f_{1p}) / (f_{2s} - f_{1s})$  ed è ancora maggiore di uno. Nel filtro passa-banda (o taglia-banda) ideale è  $f_{1s} = f_{1p} = f_1$ ,  $f_{2s} = f_{2p} = f_2$ ,  $\alpha_p = 0$  e  $\alpha_s = \infty$ . Il rapporto di transizione in tutti i filtri ideali è sempre uguale a 1.

Il secondo passo nella procedura di sintesi consiste nel determinare l'espressione analitica della risposta in ampiezza che soddisfa le specifiche di progetto: occorre, in altri termini, approssimare l'andamento costante a tratti del filtro ideale come una funzione  $A(\omega)$  scelta in una certa classe e secondo un opportuno criterio, in modo tale che verifichi le specifiche imposte dalla maschera. Per la proprietà (a) la funzione  $A^2(\omega)$  deve essere una funzione razionale di  $\omega^2$  a coefficienti reali (questa è un'altra condizione di fisica realizzabilità).

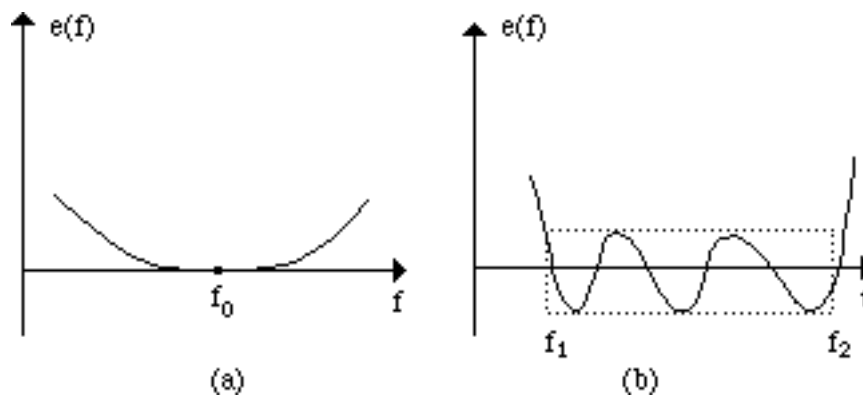


Figura 3 Confronto tra criterio massima piattezza (a) e minima piattezza (b).

Per quanto riguarda il criterio di approssimazione può essere usato un criterio che richieda che l'errore

$$e(f) = A(2\pi f) - \hat{A}(2\pi f) \quad (14)$$

sia nullo ad una particolare frequenza  $f_0$ , con alcune sue derivate;  $\hat{A}(2\pi f)$  è la risposta in ampiezza ideale da approssimare e  $A(2\pi f)$  è la risposta in ampiezza approssimante. In questo modo l'errore risulta essere “piccolo” in un intorno di  $f_0$ , la cui ampiezza dipende dall'ordine della prima derivata non nulla in  $f_0$ . Questo è il criterio della cosiddetta **massima piattezza**. Può essere usato anche un criterio che imponga che il massimo errore assoluto sia minimo in uno o più intervalli, figura 3b. Ciò in genere dà luogo ad un andamento oscillante dell'errore, e quindi della risposta in ampiezza, nell'intervallo di frequenze considerate. Questo è il criterio della minima piattezza.

Nel seguito delineaeremo la procedura di sintesi per i filtri a massima piattezza sia in banda passante che in banda oscura (**filtri di Butterworth**). La procedura riguarderà i soli filtri passa-basso, dal momento che la sintesi degli altri tipi può essere condotta in termini di un filtro passa-basso prototipo, che mediante opportune trasformazioni della variabile indipendente  $f$ , ( $\omega$  oppure  $s$ ) genera il filtro desiderato.

## 11.2 Filtri di Butterworth

I filtri di Butterworth sono caratterizzati dall'aver risposta in ampiezza massimamente piatta in banda passante e in banda oscura. Per essi la funzione densità spettrale di energia è

$$A^2(\omega) = \frac{k^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2n}}, \quad (15)$$

dove  $k$  e  $\Omega$  sono due costanti e  $n$  è un numero intero, (la (15) è una funzione razionale di  $\omega^2$  per ogni  $n$  intero). Il massimo di  $A(\omega)$  è in  $\omega=0$  ed è uguale a  $k$ ; l'intero  $n$  è detto "ordine" del filtro di Butterworth e  $\Omega$  è la pulsazione di taglio a 3 dB del filtro. La risposta in ampiezza inizia da  $20\log(k)$  (in corrispondenza di  $\omega=0$ ) e decade monotonamente di 3dB (per ogni  $n$ ) alla pulsazione  $\Omega$ .

Sviluppando la (15) in serie di Taylor nell'intorno di  $\omega=0$ , si ha:

$$A^2(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2n} + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{4n} - \dots; \quad (16)$$

la prima derivata non nulla nell'intorno di  $\omega=0$  è quella di ordine  $2n$ , il che prova la massima piatezza della funzione densità spettrale di energia nell'intorno di  $\omega=0$ ; in modo analogo si può verificare che è a massima piatezza anche in banda oscura per  $\omega \rightarrow \infty$ .

L'andamento di  $A(\omega)$  è monotono ed è illustrato in figura 4 per alcuni valori di  $n$ ; si osservi che per  $n \rightarrow \infty$ , l'approssimazione di Butterworth tende alla caratteristica del filtro passa-basso ideale.

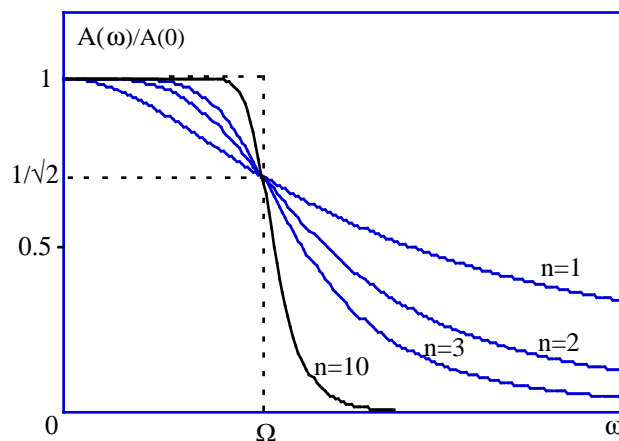


Figura 4 Risposta in ampiezza del filtro di Butterworth al variare dell'ordine.

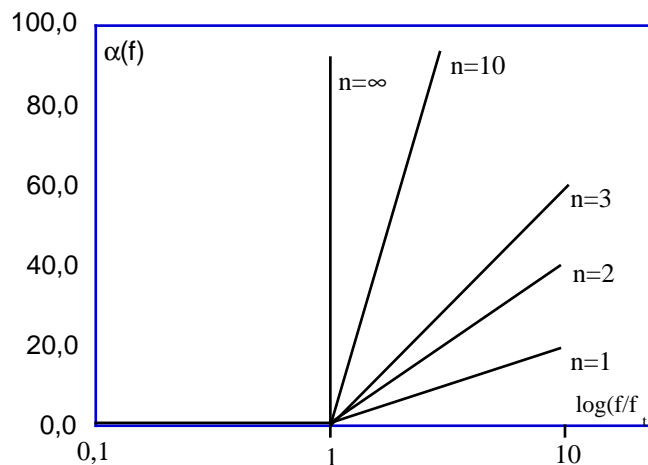


Figura 5 Diagramma di Bode della funzione di attenuazione del filtro di Butterworth al variare dell'ordine.

In figura 5 è riportato il diagramma di Bode per la funzione attenuazione corrispondente

$$\alpha(f) = -20 \log[1/A(2\pi f)] = 10 \log[1 + (2\pi f / \Omega)^{2n}]$$

$$\approx \begin{cases} 0 & f \ll (\Omega / 2\pi) \\ 20n \log[f / (\Omega / 2\pi)] & f \gg (\Omega / 2\pi) \end{cases} \quad (17)$$

ottenuto approssimando  $\alpha(f)$  con i suoi asintoti per  $f \rightarrow 0$  e  $f \rightarrow \infty$ . Si osservi che per  $f \gg \Omega/2\pi$ , l'attenuazione cresce di 20 dB/ decade.

La costante  $k$  deve essere determinata in base al valore dell'ampiezza massima richiesta, mentre l'ordine del filtro  $n$  e la frequenza di taglio a 3dB

$$f_t = \Omega / 2\pi, \quad (18)$$

devono essere determinate sulla base delle specifiche assegnate in termini di  $f_p$ ,  $f_s$ ,  $\alpha_p$  e  $\alpha_s$ .

Imponendo queste specifiche si hanno le due disequazioni:

$$10 \log[1 + (f_p / f_t)^{2n}] \leq \alpha_p, \quad (19)$$

$$10 \log[1 + (f_s / f_t)^{2n}] \geq \alpha_s,$$

nelle due incognite  $f_t$  e  $n$ . Con qualche semplice manipolazione delle (19) si ottiene per l'ordine del filtro  $n$

$$n \geq \text{int}[\ln(\eta) / \ln(\kappa)] + 1, \quad (20)$$

dove  $\kappa$  è il rapporto di transizione del filtro,  $\kappa = f_s / f_p$ , e

$$\eta = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}} = \frac{\sqrt{A_s^2 - 1}}{\epsilon}. \quad (21)$$

Per la frequenza di taglio a 3dB  $f_t$  si ha la disuguaglianza:

$$f_p \frac{1}{\sqrt[2n]{10^{\alpha_p/10} - 1}} \leq f_t \leq f_s \frac{1}{\sqrt[2n]{10^{\alpha_s/10} - 1}}. \quad (22)$$

Si osservi che è sempre  $f_p \leq f_s$ . In genere per  $n$  si prende il numero intero più piccolo che verifica la (20); una volta determinato l'ordine, attraverso la (22) viene determinata la frequenza di taglio  $f_t$  e quindi la pulsazione di taglio  $\Omega$ .

### Esempio

Determinare il filtro di Butterworth che verifica le seguenti specifiche

$$\alpha(f) \leq \alpha_p = 0.1 \text{ dB} \quad \forall f \leq f_p = 3 \text{ MHz},$$

$$\alpha(f) \geq \alpha_s = 60 \text{ dB} \quad \forall f \geq f_s = 12 \text{ MHz}.$$

Sostituendo i valori assegnati nelle (21) si ha  $\kappa = 4$ ,  $\eta = 6553$ , e sostituendo i valori così ottenuti nella (20) si ottiene che l'ordine deve verificare la condizione  $n \geq 7$ . Assumendo  $n \geq 7$ , per la frequenza di taglio a 3dB si ha  $3.92 \text{ MHz} \leq f_t \leq 4.47 \text{ MHz}$ .



I filtri di Butterworth, avendo una funzione di attenuazione monotona sia in banda passante che in banda oscura, soddisfano le specifiche con un margine crescente man mano che la frequenza aumenta in banda passante e diminuisce in banda oscura. Un approccio più efficiente è quello di distribuire l'approssimazione in modo uniforme in banda passante (Chebischew del primo tipo) o in banda oscura (Chebischew del secondo tipo) imponendo che la risposta in ampiezza oscilli con ampiezza costante in banda passante o in banda oscura. I filtri di Chebischew (filtri ellittici) sono caratterizzati da una risposta in ampiezza oscillante sia in banda passante che in banda oscura.

### 11.3 Circuiti passa tutto e circuiti a fase minima

#### 11.3.1 Circuito passa tutto

Si definisce circuito passa tutto un circuito asintoticamente stabile che ha risposta in ampiezza costante:

$$|H(i\omega)| = k \quad \forall \omega. \tag{23}$$

Il diagramma poli-zeri di un circuito passatutto ha la seguenti proprietà:

- a ogni polo  $p_i$  corrisponde uno zero  $z_i$  che è la sua immagine rispetto all'asse immaginario,

$$z_i = -p_i^*. \tag{24}$$

Dall'esame della figura 6 risulta che, il contributo della coppia  $p_i^*$  e  $z_i = -p_i$  (e quindi anche della coppia  $p_i$  e  $z_i = -p_i^*$ ) al modulo di  $H(i\omega)$  vale 1 per  $\forall \omega$ , e quindi:

$$A(\omega) = |H(i\omega)| = k \frac{\prod_i |i\omega + p_i^*|}{\prod_i |i\omega - p_i|} = k \frac{\prod_i [L\sigma_i + i(\omega - \omega_i)]}{\prod_i [-L\sigma_i + i(\omega - \omega_i)]} = k. \tag{25}$$

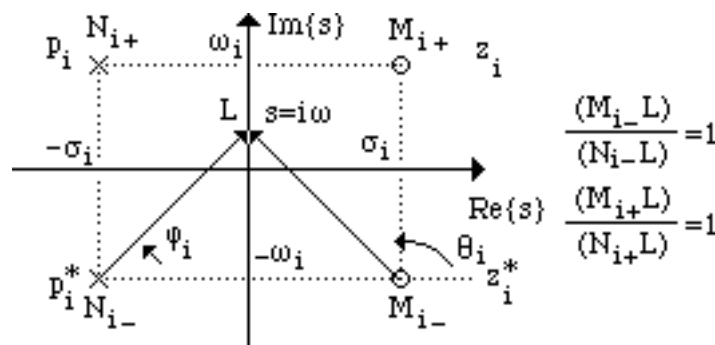


Figura 6

Una conseguenza della proprietà di simmetria appena descritta è che, la fase  $\phi(\omega)$  della risposta in frequenza decresce monotonamente.

Si consideri dapprima il contributo della coppia di zeri  $z_i$  e  $z_i^*$ . La fase  $\theta_i(\omega)$  del fattore  $i\omega - z_i^*$  decresce monotonamente dal valore  $-\pi/2$ , che assume per  $\omega = -\infty$ , al valore  $-\pi$  che assume per  $\omega = -\omega_i^-$  (vedi figura 6). Per  $\omega = -\omega_i^+$  la fase di  $i\omega - z_i^*$  è  $+\pi$  e poi decresce, di nuovo monotonamente, al valore  $+\pi/2$  che assume per  $\omega = +\infty$ .

La fase  $\hat{\theta}_i(\omega)$  del fattore  $i\omega - z_i$  decresce monotonamente dal valore  $-\pi/2$ , che assume per  $\omega = -\infty$ , al valore  $-\pi$  che assume per  $\omega = \omega_i^-$  (vedi figura 6). Per  $\omega = \omega_i^+$  la fase di  $i\omega - z_i$  è  $+\pi$  e poi decresce, di nuovo monotonamente, al valore  $+\pi/2$  che assume per  $\omega = +\infty$ .

### Osservazione

Le funzioni  $\theta_i(\omega)$  e  $\hat{\theta}_i(\omega)$  sono discontinue, rispettivamente, in  $\omega = -\omega_i$  e in  $\omega = \omega_i$  dove hanno un salto pari a  $2\pi$ . Queste discontinuità sono “eliminabili”, poiché le funzioni  $e^{i\theta_i}$  e  $e^{i\hat{\theta}_i}$  sono periodiche di periodo  $2\pi$ . È immediato verificare che gli andamenti descritti per  $\theta_i(\omega)$  e  $\hat{\theta}_i(\omega)$  sono equivalenti a: le fasi  $\theta_i(\omega)$  e  $\hat{\theta}_i(\omega)$  decrescono con legge monotona e con continuità dal valore  $3\pi/2$ , che assumono per  $\omega = -\infty$ , al valore  $+\pi/2$ , che assumono per  $\omega = +\infty$ .

Si consideri ora il contributo dei due poli  $p_i$  e  $p_i^*$ . Sia la fase  $\varphi_i(\omega)$  del fattore  $i\omega - p_i^*$ , che la fase  $\hat{\varphi}_i(\omega)$  del fattore  $i\omega - p_i$ , crescono con legge monotona e con continuità dal valore  $-\pi/2$ , che assumono per  $\omega = -\infty$ , al valore  $+\pi/2$ , che assumono per  $\omega = +\infty$ .

Si consideri la determinazione delle fasi  $\theta_i(\omega)$  e  $\hat{\theta}_i(\omega)$  che dà funzioni continue. Il contributo alla fase globale  $\Phi(\omega)$  della coppia  $z_i = -p_i^*$  e  $p_i$  e della coppia  $z_i = -p_i$  e  $p_i^*$

$$\Phi_i(\omega) = \theta_i(\omega) + \hat{\theta}_i(\omega) - [\varphi_i(\omega) + \hat{\varphi}_i(\omega)], \quad (26)$$

decresce con continuità da  $4\pi$  a  $0$  per  $\omega$  crescente da  $-\infty$  a  $+\infty$ ; in  $\omega=0$  vale  $2\pi$ , figura 7. La funzione  $\Phi_i(\omega)$  è continua ma non è dispari. In figura 8 è illustrata un'altra possibile determinazione della fase,

$$\phi_i(\omega) = \begin{cases} \Phi_i(\omega) - 4\pi & \omega < 0, \\ \Phi_i(\omega) & \omega > 0. \end{cases} \quad (27)$$

La funzione  $\phi_i(\omega)$  è dispari, ma non è continua in  $\omega=0$ .

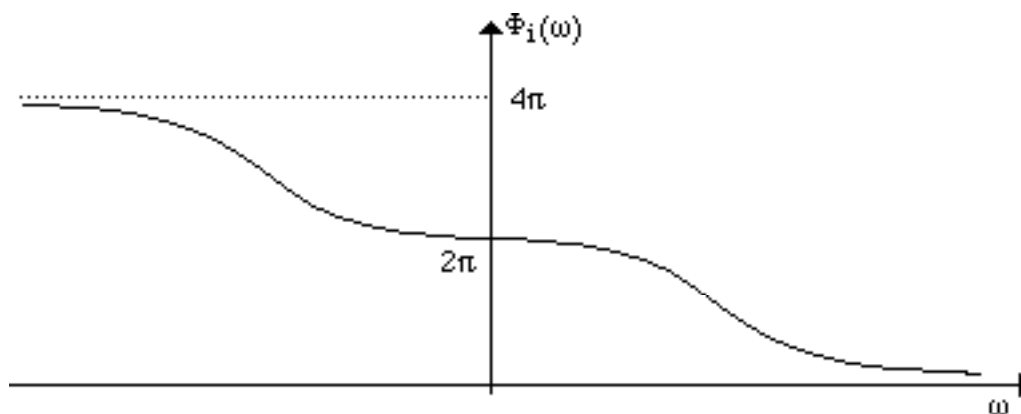


Figura 7

Allora la fase (globale)  $\Phi(\omega) = \sum_i \Phi_i(\omega)$  è ovunque continua e decresce da  $2N\pi$  a  $0$  quando  $\omega$  va da  $-\infty$  a  $+\infty$ , essendo  $N$  il numero di poli. Invece  $\phi(\omega) = \sum_i \phi_i(\omega)$  decresce da  $0$  a  $-N\pi$  per  $\omega$  crescente da  $-\infty$  a  $0^-$ ; in  $\omega=0$  ha un salto pari a  $2N\pi$  e poi decresce da  $+N\pi$  a  $0$  per  $\omega$  crescente da  $0^+$  a  $+\infty$ .

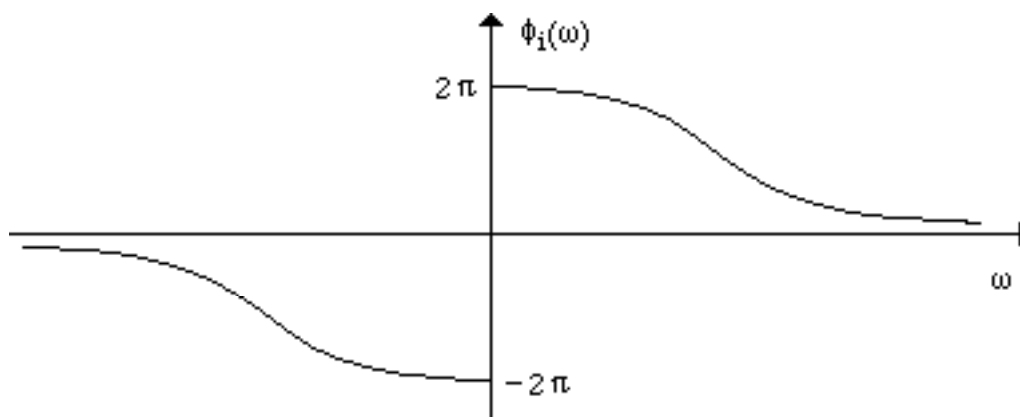


Figura 8

**Osservazione**

I circuiti passa-tutto sono usati per modificare la fase della risposta in frequenza di un dato circuito, ad esempio un circuito che realizza un filtro passa-basso. Essi prendono il nome di **circuiti equalizzatori**. Tali sistemi sono di estrema importanza nella sintesi dei filtri, poiché consentono, in fase di progettazione, di separare il problema della sintesi della risposta in ampiezza da quello della sintesi della risposta in fase.

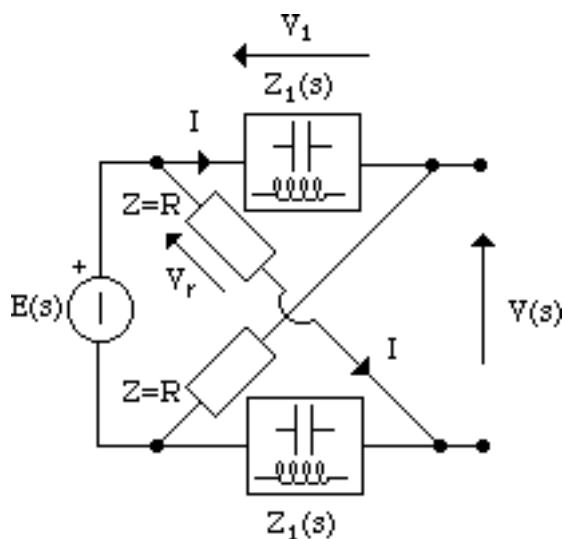


Figura 9 Circuito passa-tutto.

Un circuito che realizza un filtro passa-tutto è illustrato in figura 9; i due bipoli rappresentati con le due “scatole” sono costituiti da soli induttori e condensatori. La funzione di trasferimento di questo circuito è:

$$H(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{V_r - V_1}{E} = (R - Z_1) \frac{I}{E} = \frac{(R - Z_1)}{(R + Z_1)} \tag{28}$$

Siccome ogni blocco rappresentato da una scatola corrisponde a un bipolo costituito da soli bipoli dinamici (induttori e condensatori), si ha  $Z_1(i\omega) = iX(\omega)$  (l'impedenza operatoriale per  $s = i\omega$  coincide con l'impedenza introdotta nell'analisi di un circuito in regime sinusoidale con il metodo fasoriale), e quindi

$$H(i\omega) = \frac{R - iX(\omega)}{R + iX(\omega)}. \quad (29)$$

Dalla (29) si ha immediatamente:

$$A(\omega) = |H(i\omega)| = \frac{|R - iX(\omega)|}{|R + iX(\omega)|} = 1 \quad \forall \omega. \quad (30)$$

### Osservazione

Nella realtà non esistono condensatori e induttori ideali, cioè sia l'impedenza del condensatore che quella dell'induttore hanno una parte reale diversa da zero per  $s = i\omega$ , a causa delle perdite nel dielettrico, nei conduttori e nei materiali magnetici. Essa, sebbene sia molto piccola, non può mai essere uguale a zero. Pertanto non è possibile realizzare un filtro passa-tutto ideale, così come è stato definito. Comunque, scegliendo in maniera opportuna i componenti è possibile realizzare dei circuiti che approssimano molto bene un circuito passa-tutto.

### 11.3.2 Circuiti a fase minima

#### Definizione

Un circuito (e più in generale un sistema lineare) con tutti poli a parte reale negativa si dice a fase minima se tutti gli zeri hanno parte reale negativa.

Se un sistema (o circuito) è a fase minima e  $H(s)$  è la sua funzione di trasferimento, allora la funzione analitica  $U(s)$ , ottenuta invertendo  $H(s)$ ,

$$U(s) = \frac{1}{H(s)}, \quad (31)$$

ha tutti poli a parte reale minore di zero.

La derivata della fase  $\phi = \phi(\omega)$  rispetto a  $\omega$ , cambiata di segno, prende il nome di **ritardo di gruppo** del circuito ( $\phi = \phi(\omega)$  è la determinazione della fase che da luogo a una funzione continua e derivabile ovunque),

$$\tau_g \equiv -\frac{d\phi}{d\omega}, \quad (32)$$

mentre la grandezza

$$\tau_p \equiv -\frac{\phi(\omega)}{\omega} \quad (33)$$

prende il nome di **ritardo di fase** del circuito.

Che significato hanno i ritardi di gruppo e di fase? Se il segnale in ingresso  $x(t)$  è lentamente variabile nel tempo se confrontato con la risposta impulsiva del sistema, allora la risposta del circuito è, con buona approssimazione, data da<sup>1</sup>

$$u(t) \cong A(0)f[t - \tau_g(0)]. \quad (34)$$

In questo caso il ritardo di gruppo rappresenta il ritardo con il quale viene trasferito il segnale dall'ingresso all'uscita. Si consideri, ora, in ingresso al circuito un segnale di questo tipo:

$$x(t) = a(t)\cos(\omega_0 t); \quad (35)$$

se l'**inviluppo**  $a(t)$  varia lentamente nel tempo rispetto alla **portante**  $\cos(\omega_0 t)$ , l'uscita è approssimativamente data

$$u(t) \cong A(\omega_0)a[t - \tau_g(\omega_0)]\cos[\omega_0(t - \tau_p(\omega_0))]. \quad (36)$$

In questo caso il ritardo di gruppo rappresenta il ritardo con il quale viene trasferito dall'ingresso all'uscita l'inviluppo e il ritardo di fase il ritardo con il quale viene trasferita la fase della portante.

Un circuito a fase minima ha la seguente proprietà:

sia  $H(s)$  la funzione di trasferimento di un circuito arbitrario con poli tutti a parte reale minore di zero e zeri tutti a parte reale maggiore di zero. Se la risposta in ampiezza  $|H(i\omega)|$  è uguale a quella di un circuito a fase minima con funzione di trasferimento  $H_m(s)$ ,

$$|H(i\omega)| = |H_m(i\omega)|, \quad (37)$$

allora il ritardo di gruppo  $-\frac{d\phi}{d\omega}$  di  $H(i\omega)$  è più grande del ritardo di gruppo  $-\frac{d\phi_m}{d\omega}$  di  $H_m(i\omega)$ .

La dimostrazione di questa proprietà è semplice. Si consideri la funzione

$$H_0(s) = \frac{H(s)}{H_m(s)}. \quad (38)$$

Dalle (37) e (38) segue che, il modulo di  $H_0(i\omega)$  è uguale a uno per ogni valore della pulsazione. Inoltre i poli di  $H_0(s)$  sono tutti a parte reale minore di zero, perché essi sono i poli di  $H(s)$  e gli zeri di  $H_m(s)$ . Pertanto  $H_0(s)$  è la funzione di trasferimento di un circuito passa-tutto e la fase  $\phi_0(\omega)$  di  $H_0(i\omega)$  decresce con legge monotona al crescere della pulsazione. Di conseguenza deve essere

$$\frac{d\phi_0}{d\omega} < 0; \quad (39)$$

usando la relazione  $\phi_0(\omega) = \phi(\omega) - \phi_m(\omega)$ , si ottiene

$$-\frac{d\phi_m}{d\omega} < -\frac{d\phi}{d\omega}. \quad (40)$$

---

<sup>1</sup> Vedi in A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw Hill.

In conclusione, tra tutti i possibili circuiti che possono avere una assegnata risposta in ampiezza quello a fase minima introduce un ritardo di gruppo minimo.

## 11.4 Fattorizzazione spettrale

Il problema della fattorizzazione spettrale è quello di determinare la funzione di trasferimento, o equivalentemente la risposta impulsiva, di un circuito (o più in generale di un sistema lineare tempo-invariante), quando è assegnata la sola risposta in ampiezza  $A=A(\omega)$ .

Innanzitutto  $A(\omega)$  deve verificare la condizione di Paley-Wiener discussa nel capitolo precedente. Tuttavia se la condizione di Paley-Wiener è soddisfatta, la soluzione del problema non è unica. Ad esempio, lo spostamento di uno zero nella posizione immagine non altera la risposta in ampiezza, e altrettanto è vero per lo spostamento di un polo nella sua posizione immagine. Però se si impongono le condizioni aggiuntive che il sistema sia asintoticamente stabile e a fase minima, allora la soluzione del problema è unica.

Siccome  $A(\omega)$  è in corrispondenza biunivoca con la funzione densità di energia, il problema della fattorizzazione può essere equivalentemente posto assegnando la funzione  $A^2(\omega)$ . La funzione  $A^2(\omega)$  deve essere necessariamente una funzione razionale di  $\omega^2$ , affinché possa essere la densità spettrale di energia di una funzione risposta in frequenza di un circuito (a parametri concentrati),

$$G(\omega^2) = A^2(\omega) = H(i\omega) \cdot H^*(i\omega) = H(i\omega) \cdot H(-i\omega), \quad (41)$$

dove  $G(\omega^2)$  è la funzione densità spettrale di energia assegnata. Dunque in termini della variabile complessa  $s$  dalla (41) si ha

$$H(s) \cdot H(-s) = G(-s^2); \quad (42)$$

$G(-s^2)$  è il prolungamento analitico di  $G(\omega^2)$  a tutto il piano complesso.

È facile mostrare che il diagramma poli-zeri di  $G(-s^2)$  è simmetrico sia rispetto all'asse reale che rispetto all'asse immaginario. Siccome, per ipotesi,  $G(\omega^2)$  è una funzione razionale di  $\omega^2$  a coefficienti reali, anche  $G(-s^2)$  è una funzione razionale, a coefficienti reali, di  $s^2$  e quindi di  $s$ . Pertanto i poli e gli zeri di  $G(-s^2)$  sono o reali o complessi coniugati, e di conseguenza simmetrici rispetto all'asse reale. D'altra parte se  $z_h$  e  $p_k$  sono, rispettivamente, uno zero e un polo di  $G(-s^2)$ , allora anche  $-z_h$  e  $-p_k$  sono, rispettivamente, uno zero e un polo di  $G(-s^2)$ .

Il caso di zeri immaginari può essere trattato tramite un ragionamento al limite, cioè considerare la quaterna  $\{\varepsilon + i\omega_h, \varepsilon - i\omega_h, -\varepsilon + i\omega_h, -\varepsilon - i\omega_h\}$  e poi far tendere  $\varepsilon$  a zero. Pertanto gli zeri immaginari hanno necessariamente molteplicità due, o multipla di due (poli immaginari non c'è ne sono, perché si considerano solo sistemi asintoticamente stabili).

Sulla base di tali proprietà, il problema della fattorizzazione spettrale viene risolto con la seguente procedura.

<b>Passo 1</b>	$G(\omega^2) =  H(i\omega) ^2$ si prolunga alla restante parte del piano complesso con la sostituzione formale $s = i\omega$ e così si ottiene $G(-s^2)$ .
<b>Passo 2</b>	Si determinano i poli e gli zeri di $G(-s^2)$ .
<b>Passo 3</b>	Si sceglie il sottoinsieme $\{z_i\}^-$ degli zeri e il sottoinsieme $\{p_i\}^-$ dei poli di $G(-s^2)$ a parte reale negativa, di modo che il sistema risulta essere <u>asintoticamente stabile</u> e a fase <u>minima</u> .
<b>Passo 4</b>	Si pone $H(s) = k \frac{\prod_{z_k \in \{z_h\}^-} (s - z_k)}{\prod_{p_k \in \{p_h\}^-} (s - p_k)} \quad (43)$
<b>Passo 5</b>	Si determina la costante $k$ imponendo $H(0)=G(0)$ .

La procedura innanzi descritta può essere semplificata scrivendo  $G(-s^2)$  in termini di fattori bi-quadratici del tipo

$$[(s + \alpha)^2 + \beta^2] / [(s - \alpha)^2 + \beta^2] = s^4 + As^2 + B, \quad (44)$$

originati dalla quaterna di poli  $(\pm\alpha \pm i\beta)$  ( $\alpha \geq 0$  e  $\beta \geq 0$ ), dove

$$\begin{aligned} A &= 2\beta^2 - 4\alpha^2, \\ B &= (\alpha^2 + \beta^2)^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Il corrispondente fattore per  $H(s)$  è

$$(s + \alpha + i\beta)(s + \alpha - i\beta) = s^2 + 2\alpha s^2 + \omega_0^2, \quad (46)$$

dove

$$\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (47)$$

### Esempio

Si consideri la funzione  $G(\omega^2) = (\omega^2 + 4) / (\omega^4 + 10\omega^2 + 9)$ . Ad essa corrisponde la funzione analitica  $G(-s^2) = (-s^2 + 4) / (s^4 - 10s^2 + 9)$ . Il fattore a fase minima corrispondente a  $(-s^2 + 4)$  è  $(s+2)$  dato che  $(-s^2 + 4) = (-s+2)(s+2)$ . Il fattore  $s^2 + 2\alpha s^2 + \omega_0^2$  corrispondente a  $s^4 - 10s^2 + 9$  è, secondo le formule (44)-(47),  $s^2 + 4s + 3$ . Allora la  $H(s)$  di un circuito asintoticamente stabile e a fase minima, con densità spettrale di energia  $G$ , vale  $H(s) = (s + 2) / (s^2 + 4s + 3)$ . Essa ha uno zero in  $s=-2$ , e due poli in  $s=-1$  e  $s=-3$ .

### 11.4.1 Fattorizzazione spettrale per i filtri di Butterworth

Si consideri, ora, un filtro di Butterworth. Esso è completamente determinato una volta assegnata l'ampiezza alla pulsazione  $\omega=0$ , la pulsazione di taglio a 3dB  $\Omega$  e l'ordine  $n$ . Si ha

$$G(\omega^2) = \frac{k^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2n}}, \quad (48)$$

e quindi

$$G(-s^2) = \frac{k^2}{1 + \left(-\frac{s^2}{\Omega^2}\right)^n}. \quad (49)$$

Dalla (49) segue immediatamente che, il filtro di Butterworth non ha zeri al finito e che i poli sono le soluzioni a parte reale minore di zero dell'equazione

$$\left(-\frac{s^2}{\Omega^2}\right)^n + 1 = 0. \quad (50)$$

Risolvendo la (50), si ottiene per le radici a parte reale minore di zero:

$$\frac{s_1}{\Omega} = i \exp\left(i \frac{\pi}{2n}\right), \quad \frac{s_2}{\Omega} = i \exp\left(i \frac{3\pi}{2n}\right), \dots, \quad \frac{s_n}{\Omega} = i \exp\left[i \left(\frac{2n-1}{n}\right) \frac{\pi}{2}\right]. \quad (51)$$

Le radici dell'equazione (50) sono uniformemente distribuite lungo la circonferenza di raggio 1 a partire dalla radice reale  $s=-1$  se  $n$  è dispari e dalla radice complessa  $s = \cos(\pi/2n) + i \sin(\pi/2n)$  se  $n$  è pari. In tabella I sono riportati i poli a parte reale minore di zero di  $G(-s^2)$  per  $\Omega=1$  e  $n=1,2,\dots,6$ .

Tabella I. Posizione dei poli del filtro di Butterworth di ordine  $n$  per  $\Omega=1$ .

n	n <b>dispari</b>	n	n <b>pari</b>
1	$s_1 = -1 + i0$	2	$s_1 = -0.707 + i0.707$ $s_2 = -0.707 - i0.707$
3	$s_1 = -0.500 + i0.866$ $s_2 = -0.500 - i0.866$ $s_3 = -1 + i0$	4	$s_1 = -0.924 + i0.383$ $s_2 = -0.924 - i0.383$ $s_3 = -0.383 + 0.924i$ $s_4 = -0.383 - 0.924i$
5	$s_1 = -0.809 + i0.588$ $s_2 = -0.809 - i0.588$ $s_3 = -0.309 + i0.951$ $s_4 = -0.309 - i0.951$ $s_5 = -1 + i0$	6	$s_1 = -0.966 + i0.259$ $s_2 = -0.966 - i0.259$ $s_3 = -0.707 + i0.707$ $s_4 = -0.707 - i0.707$ $s_5 = -0.259 + 0.966i$ $s_6 = -0.259 - 0.966i$



La funzione di trasferimento associata con una funzione di Butterworth di ordine  $n$  con  $k=1$  e  $\Omega=1$  è data da (**filtro passa-basso di Butterworth normalizzato**):

$$H(s) = \frac{1}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}, \quad (52)$$

dove i coefficienti  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  sono elencati in Tabella II per  $n=1,2,\dots,6$ . Poiché  $H(s)$  nell'equazione (52) non ha zeri, una funzione di trasferimento siffatta è denominata funzione a tutti poli.

Tabella II. Coefficienti del polinomio  $D(s)$  di  $H(s)$  per  $k=1$  e  $\Omega=1$ .

n	b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>5</sub>
1	1.000					
2	1.000	1.414				
3	1.000	2.000	2.000			
4	1.000	2.613	3.414	2.613		
5	1.000	3.236	5.236	5.236	3.236	
6	1.000	3.864	7.764	9.142	7.464	3.864

La funzione di Butterworth è la funzione più semplice in grado di approssimare la risposta in ampiezza di un filtro passa-basso ideale, con un grado di precisione arbitrario. Esistono, comunque, classi di funzioni più sofisticate, tramite le quali è possibile ottenere un'approssimazione migliore per un dato ordine  $n$ . La loro descrizione non rientra negli scopi di queste Lezioni introduttive alla problematica dei filtri analogici. Basterà dire, comunque, che le funzioni di trasferimento ad esse corrispondenti sono a tutti poli e quindi del tipo (52). I coefficienti corrispondenti si trovano elencati nei manuali di progettazione dei filtri, per varie classi di funzioni approssimanti, compresa la funzione di Butterworth, fino a valori di  $n$  piuttosto elevati.

#### 11.4.2 Sintesi di funzioni di trasferimento a tutti poli tramite elementi passivi

La sintesi di un filtro consta di due passi fondamentali: (a) sintesi della funzione di trasferimento che ha la risposta in ampiezza desiderata; (b) la sintesi del circuito che realizza la funzione di trasferimento determinata al passo precedente.

In questo paragrafo non viene sviluppata la teoria della sintesi dei circuiti. Ci si limiterà solo a ricordare alcuni risultati di questa teoria, attraverso delle esemplificazioni.

Un risultato fondamentale della sintesi, che usa elementi passivi, è dovuto a S. Darlington. Si consideri un circuito passivo del tipo illustrato in figura 10, costituito da un doppio bipolo passivo costituito da soli induttori e condensatori e da un resistore (il segnale di ingresso potrebbe essere anche la corrente). Con un circuito di questo tipo è possibile realizzare qualsiasi funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (53)$$

che verifichi le seguenti condizioni:

- (a) il grado del numeratore è al più uguale al grado del denominatore aumentato di 1;  
 (b) i poli sono tutti a parte reale minore di zero.

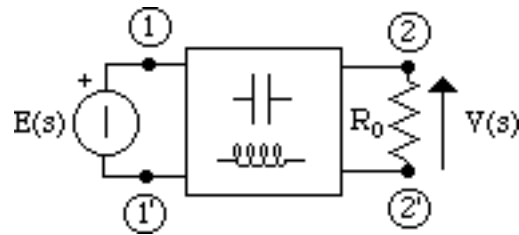


Figura 10

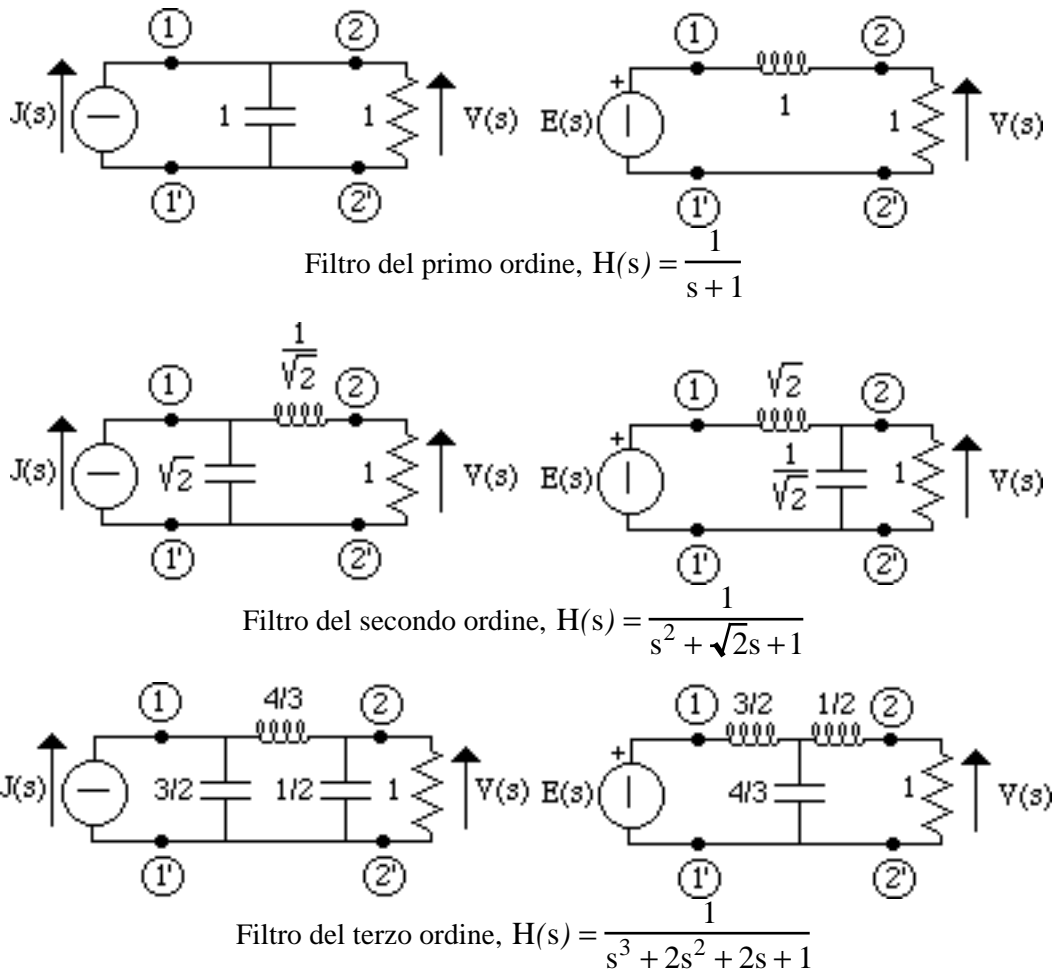


Figura 11 Reti a scala che realizzano filtri di Butterworth con  $n=1,2$  e  $3$ .

Si considerino, ora, i filtri di Butterworth di ordine 1, 2 e 3 normalizzati, cioè con pulsazione di taglio a 3dB  $\Omega = 1$  e ampiezza massima uguale a 1. Essi possono essere realizzati così come illustrato in figura 11. Queste realizzazioni prendono il nome di **reti a scala**. Il numero degli elementi attivi è pari al numero dei poli del circuito e quindi all'ordine del filtro. Esistono degli abachi che riportano le reti che realizzano i filtri di Butterworth di ordine qualsiasi.

#### Osservazione

Il circuito descritto in figura 12 si ottiene da quello illustrato in figura 10 sostituendo al generatore di tensione sulla porta “1” del doppio bipolo LC un corto circuito e inserendo in serie al resistore  $R_0$  connesso alla porta “2” il generatore di tensione.

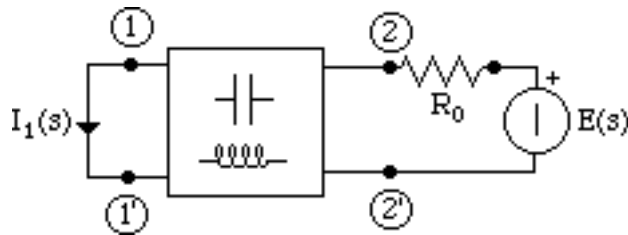


Figura 12

Applicando la prima forma della proprietà della reciprocità ai circuiti di figura 9 e 13, si ottiene per la funzione di trasferimento  $H_r(s)$  del circuito di figura 13

$$H_r(s) \equiv \frac{I_1(s)}{E(s)} = \frac{H(s)}{R_0}, \quad (54)$$

cioè la funzione di trasferimento del circuito di figura 12 è, a meno di un fattore costante, uguale a quella del circuito di figura 10. Pertanto nei circuiti illustrati in figura 11 se al posto dei generatori di tensione si sostituiscono dei corto circuiti e i generatori di tensione si inseriscono in serie ai resistori di resistenza unitaria si ottengono ancora dei filtri di Butterworth di ordine 1, 2 e 3 rispettivamente. Considerazioni duali valgono per i circuiti con i generatori ideali di corrente. Questo risultato è molto interessante dal punto di vista applicativo, perché qualsiasi sorgente reale di segnali elettrici deve essere schematizzata necessariamente con un generatore ideale di tensione (o di corrente) e un resistore in serie (rispettivamente, in parallelo).

## 11.5 Leggi di trasformazione

Le reti a scala appena illustrate possono essere usate per realizzare o filtri passa-basso dello stesso ordine, ma con pulsazione a 3dB e ampiezza massima qualsiasi, o filtri di altro tipo, utilizzando le trasformazioni in frequenza che appresso illustreremo.

### 11.5.1 Variazione in scala della frequenza di taglio

Si consideri un circuito  $N_0$  (**circuito prototipo**) con risposta in ampiezza

$$A_0 = A_0(\omega). \quad (55)$$

Moltiplichiamo tutte le capacità e tutte le induttanze del circuito  $N_0$  per la grandezza adimensionale  $(\bar{\omega}/\Omega)$  dove  $\bar{\omega} = 1$  [rad/s] e  $\Omega$  è una grandezza dimensionale omogenea con una pulsazione. Allora la risposta in frequenza del circuito  $N_1$ , così ottenuto, è data da

$$A_1 = A_0\left(\frac{\bar{\omega}\omega}{\Omega}\right). \quad (56)$$

### Dimostrazione

La dipendenza funzionale di  $A_0 = A_0(\omega)$  dai parametri circuitali  $C_k$ ,  $L_h$  e dalla pulsazione  $\omega$  è del tipo:

$$A_0 = \tilde{A}_0 \left( \omega L_h; \frac{1}{\omega C_k} \right). \quad (57)$$

Pertanto la risposta in ampiezza del circuito  $N_1$  è data da:

$$A_1 = \tilde{A}_0 \left( \frac{\omega \bar{\omega} L_h}{\Omega}; \frac{\Omega}{\omega \bar{\omega} C_k} \right) = A_0 \left( \frac{\bar{\omega} \omega}{\Omega} \right). \quad (58)$$

Quando moltiplichiamo le capacità e le induttanze per l'unico fattore adimensionale  $(\bar{\omega}/\Omega)$  nella funzione di trasferimento bisogna sostituire  $s$  con  $(\bar{\omega}s/\Omega)$ .

Si assuma, ora, che la risposta in ampiezza  $A_0(\omega)$  sia quella di un filtro passa-basso di Butterworth normalizzato (prototipo). Allora la forma della risposta in ampiezza resta inalterata, restano inalterati i margini  $\alpha_p$  e  $\alpha_s$  e resta inalterato il rapporto di transizione  $\kappa = f_p / f_s$ . Invece le frequenze di taglio della banda passante e della banda oscura scalano come  $\Omega f_{s0} / \bar{\omega}$  e  $\Omega f_{p0} / \bar{\omega}$ , dove  $f_{s0}$  e  $f_{p0}$  sono le frequenze di taglio del prototipo.

### 11.5.2 Variazione in scala dell'impedenza

Si consideri un circuito  $N_0$  (prototipo) con risposta in ampiezza

$$A_0 = A_0(\omega); \quad (59)$$

si moltiplichino ogni resistenza e ogni induttanza per un fattore adimensionale  $K$  e si divida ogni capacità per lo stesso fattore  $K$ . Allora la risposta in ampiezza del circuito  $N_2$ , così ottenuto, è data da

$$A_2 = K^h A_0(\omega), \quad (60)$$

dove  $h$  prende, rispettivamente, i valori 1, -1, 0 e 0 a seconda se  $A_0(\omega)$  è un'impedenza, una ammettenza, un rapporto tra tensioni o un rapporto tra correnti. Si lascia al lettore la dimostrazione.

### Esempio

In figura 13a è illustrato il circuito che realizza il filtro passa-basso di Butterworth del terzo ordine con pulsazione a 3dB uguale a 1 e ampiezza massima uguale a 1: l'uscita è la tensione del resistore con resistenza  $R_0=1$ . In figura 13b è illustrato il circuito che realizza lo stesso filtro, ma con pulsazione di taglio a 3dB uguale a  $10^6$  e ampiezza massima uguale a 1. In figura 13c è illustrato il circuito che realizza un filtro passa basso con pulsazione di taglio a 3 dB uguale a  $10^6$  e ampiezza massima uguale a 1, quando la resistenza del resistore  $R_0$  è 1000. Se l'uscita fosse la corrente nel

resistore  $R_0$ , si avrebbe una ampiezza massima uguale a  $10^{-3}$  con  $R_0=1000$  e una ampiezza massima uguale a  $10^3$  con  $R_0=1m\Omega$ .

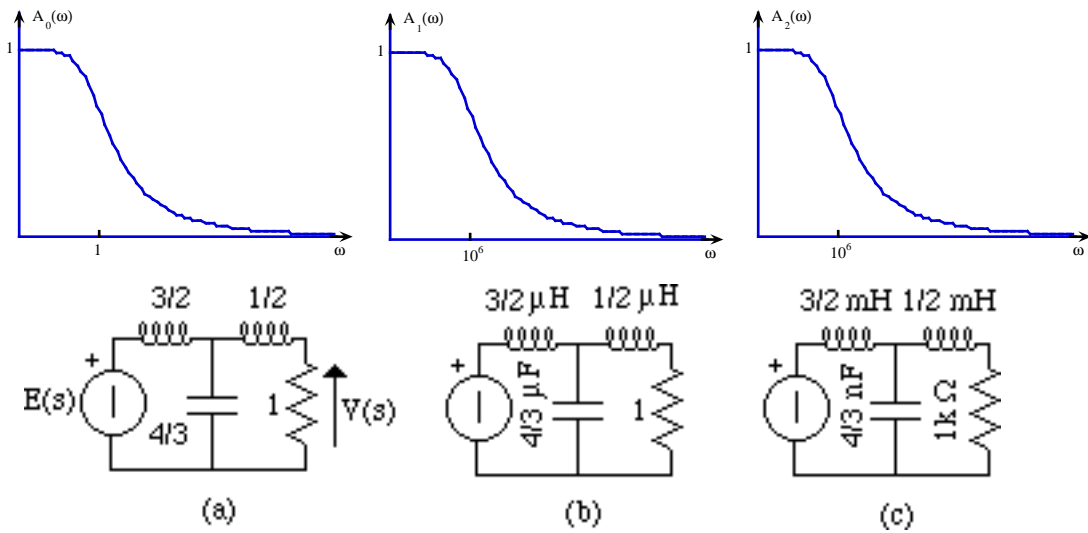


Figura 13 Prototipo del filtro di Butterworth del terzo ordine (a), realizzazione con ampiezza massima unitaria e pulsazione a 3dB uguale a  $10^6$  per  $R_0=1$  (b) e  $R_0=1000$  (c).

### 11.5.3 Trasformazioni di frequenza

Come già accennato, mediante opportune trasformazioni è possibile convertire un filtro passa-basso (prototipo) in un altro tipo di filtro. Un primo esempio di queste trasformazioni è stato appena descritto.

Sia  $A_0 = A_0(\omega)$  la risposta in ampiezza del filtro passa-basso di Butterworth di ordine  $n$  con ampiezza massima unitaria e pulsazione a 3dB uguale a 1 (**filtro prototipo**); si indichi con  $N_0$  il circuito prototipo che realizza la risposta in ampiezza  $A_0(\omega)$ . La dipendenza funzionale di  $A_0(\omega)$  dai parametri circuitali  $C_k$ ,  $L_h$  e dalla pulsazione  $\omega$  è del tipo:

$$A_0 = \tilde{A}_0 \left( \omega L_h; \frac{1}{\omega C_k} \right). \tag{61}$$

#### - *Trasformazione* LPF $\rightarrow$ HPF

Si sostituisca nel circuito  $N_0$  al posto del generico induttore di induttanza  $L_h$  un condensatore con capacità  $C'_h = 1 / (L_h \Omega \bar{\omega})$  e al posto del generico condensatore di capacità  $C'_h$  un induttore con induttanza  $L'_h = 1 / (C_h \Omega \bar{\omega})$ , dove  $\bar{\omega} = 1$  e  $\Omega$  è una grandezza dimensionale omogenea con una pulsazione. Allora la risposta in frequenza del circuito  $N'$ , così ottenuto, è data da

$$A'(\omega) = \tilde{A}_0 \left( \frac{\bar{\omega} \Omega L_h}{\omega}; \frac{\omega}{\bar{\omega} \Omega C_k} \right) = A_0 \left( \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega} \right). \tag{62}$$

$A'(\omega)$  tende a 1 quando  $\omega \rightarrow \infty$  e tende a zero quando  $\omega \rightarrow 0$ ; per  $\omega = \Omega$  il valore che  $A'(\omega)$  assume è uguale a  $1/\sqrt{2}$ . Di conseguenza,  $A' = A'(\omega)$  rappresenta la risposta in ampiezza di un filtro passa-alto con pulsazione a 3dB uguale a  $\Omega$ . Le frequenze di taglio della banda passante e della

banda oscura scalano come  $\Omega / \bar{\omega}$  e i margini  $\alpha_p$  e  $\alpha_s$  restano inalterati, così come resta inalterato il rapporto di transizione  $\kappa_{\text{HPF}} = f'_p / f'_s = \kappa_{\text{LPF}} = f_s / f_p$ .

La trasformazione  $\text{LPF} \rightarrow \text{HPF}$ , appena descritta, è equivalente a sostituire nella funzione di trasferimento corrispondente  $s$  con  $(\Omega \bar{\omega} / s)$ .

### Esempio

Il circuito in figura 14a realizza un filtro passa-basso con pulsazione di taglio a 3dB uguale a  $1/RC$ . Il circuito di figura 14b, ottenuto operando la trasformazione  $\text{LPF} \rightarrow \text{HPF}$ , realizza un filtro passa-alto con pulsazione di taglio a 3dB uguale a  $1/RC$ , se  $L = 1/(C\bar{\omega})$ . In figura 15 sono illustrate le relative risposte in ampiezza.

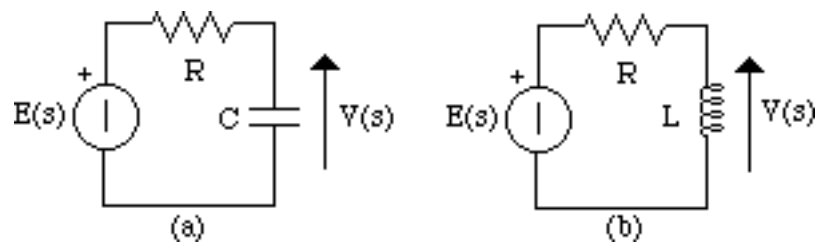


Figura 14 Prototipo passa-basso (a) e filtro passa-alto ottenuto attraverso la trasformazione (b).

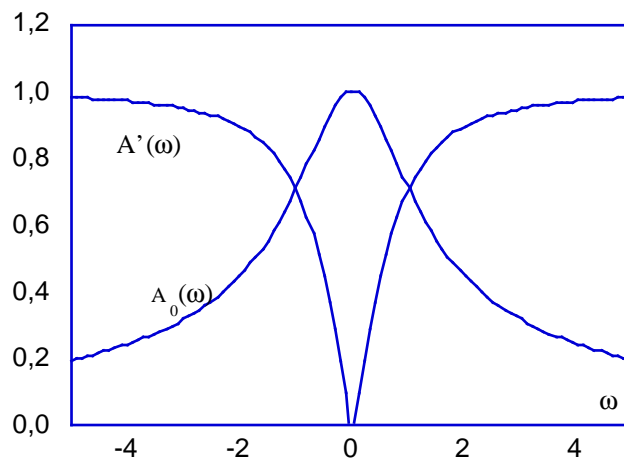


Figura 15

La risposta del filtro passa-basso di figura 14a è massima quando l'impedenza del condensatore è infinita, e ciò accade per  $\omega = 0$ , ed è minima quando l'impedenza è zero, e ciò accade per  $\omega \rightarrow \infty$ . Sostituendo il condensatore con l'induttore, il massimo della risposta in ampiezza si ha quando l'impedenza dell'induttore è infinita, e ciò, in questo caso, accade per  $\omega \rightarrow \infty$ , e il minimo della risposta in ampiezza si ha quando l'impedenza dell'induttore è uguale a zero, e ciò, in questo caso, accade per  $\omega = 0$ . In questo modo si ha "l'inversione" della risposta in ampiezza del filtro passa-basso e si ottiene il filtro passa-alto.

### - Trasformazione $\text{LPF} \rightarrow \text{BPF}$

Si sostituisca nel circuito  $N_0$  al posto del generico induttore di induttanza  $L_k$  un induttore con induttanza  $L''_k = (L_k \bar{\omega}) / \Omega$  in serie con un condensatore con capacità  $C''_k = 1 / (\omega_0^2 L''_k)$ , e al posto del generico condensatore di capacità  $C_h$  un condensatore con capacità  $C''_k = (C_k \bar{\omega}) / \Omega$  in parallelo

a un induttore con induttanza  $L_k'' = 1/(\omega_0^2 C_k'')$ . Allora nella (61) al posto della reattanza  $\omega L_k$  c'è la reattanza  $L_k \frac{\bar{\omega}\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$  e al posto della reattanza  $1/(\omega C_k)$  c'è la reattanza  $\frac{\Omega}{\bar{\omega}\omega C_k} \left(\frac{1}{1 - \omega_0^2/\omega^2}\right)$ . In questo caso la risposta in frequenza del circuito N'', così ottenuto, è data da

$$A''(\omega) = \tilde{A}_0 \left[ L_k \frac{\bar{\omega}\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right); \frac{\Omega}{\bar{\omega}\omega C_k} \left(\frac{1}{1 - \omega_0^2/\omega^2}\right) \right] = A_0 \left[ \frac{\bar{\omega}\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \right] \quad (63)$$

$A''(\omega)$  tende a 1 quando  $\omega \rightarrow \pm\omega_0$  e tende a zero quando  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Pertanto  $A'' = A''(\omega)$  rappresenta la risposta in ampiezza di un filtro passa-banda. Quando l'argomento di  $A''(\omega)$  è uguale a  $\pm 1$  si hanno, rispettivamente, le pulsazioni di taglio a 3dB inferiore e superiore,  $\omega_- = 2\pi f_1$  e  $\omega_+ = 2\pi f_2$ . Esse valgono

$$\frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \omega_{\pm} \cong \omega_0 \pm \frac{\Omega}{2} \quad \text{se} \quad \frac{\Omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (64)$$

La banda passante del filtro passa banda è centrata alla pulsazione  $\omega_0$  e la larghezza a 3dB è  $\omega_+ - \omega_- \cong \Omega$ . In questo caso è stata traslata in frequenza di un intervallo  $\omega_0$  la risposta in ampiezza del filtro passa-basso.

La trasformazione LPF  $\rightarrow$  BPF, appena descritta, è equivalente a sostituire nella funzione di trasferimento corrispondente  $s$  con  $(\bar{\omega}/\Omega)[(s^2 + \omega_0^2)/s]$ .

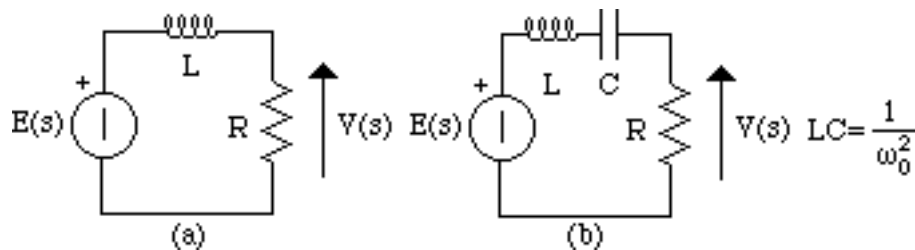


Figura 16 Prototipo passa-basso (a) e filtro passa-banda ottenuto attraverso la trasformazione LPF  $\rightarrow$  BPF (b).

**Esempio**

Il circuito in figura 16a realizza un filtro passa-basso con pulsazione di taglio a 3dB uguale a  $R/L$ . Il circuito di figura 16b, ottenuto operando la trasformazione LPF  $\rightarrow$  BPF, realizza un filtro passa-banda con pulsazione di taglio a 3dB superiore e inferiore uguali, rispettivamente, a  $\omega_0 \pm \frac{R}{2L}$  se  $\omega_0 \gg R/L$ ; in questo limite la banda passante a 3dB è  $(-R/(2L) + \omega_0, R/(2L) + \omega_0)$ . In figura 17 sono illustrate le relative risposte in ampiezza.

La risposta del filtro passa-basso di figura 16a è massima quando l'impedenza dell'induttore è zero, e ciò accade per  $\omega = 0$ , ed è minima quando l'impedenza è infinita, e ciò accade per  $\omega \rightarrow \infty$ . Sostituendo l'induttore con la serie LC, il massimo della risposta in ampiezza si ha quando l'impedenza equivalente della serie LC è uguale a zero, e ciò, in questo caso, accade per

$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (condizione di risonanza), e il minimo della risposta in ampiezza si ha quando l'impedenza della serie LC è infinita, e ciò, in questo caso, accade per  $\omega = 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ . In questo modo viene “traslata” la risposta in ampiezza del filtro passa-basso, e si ottiene il filtro passa-banda.

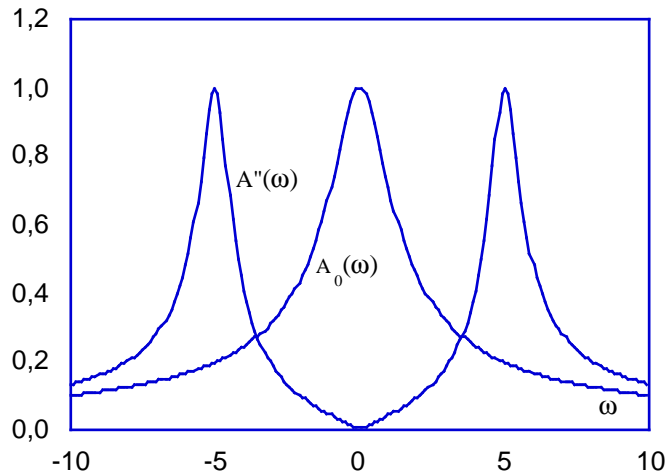


Figura 17

### - Trasformazione LPF $\rightarrow$ RBF

Si sostituisca nel circuito prototipo  $N_0$  al posto del generico induttore di induttanza  $L_k$  un condensatore con capacità  $C_k''' = 1/(L_k \bar{\omega} \Omega)$  in parallelo a un induttore con induttanza  $L_k''' = 1/(\omega_0^2 C_k''')$ , e al posto del generico condensatore di capacità  $C_h$  un induttore con induttanza  $L_k''' = 1/(C_k \bar{\omega} \Omega)$  in serie a un condensatore con capacità  $C_k''' = 1/(\omega_0^2 L_k''')$ . Allora si deve sostituire nella (61) alla reattanza  $\omega L_k$  la reattanza  $L_k \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega} \left( \frac{1}{1 - \omega_0^2 / \omega^2} \right)$  e alla  $1/(\omega C_k)$  la reattanza  $\frac{\omega}{\Omega \bar{\omega} C_k} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ . In questo caso la risposta in frequenza del circuito  $N'''$ , così ottenuto, è data da

$$A'''(\omega) = \tilde{A}_0 \left[ L_k \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega} \left( \frac{1}{1 - \omega_0^2 / \omega^2} \right); \frac{\omega}{\bar{\omega} \Omega C_k} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] = A_0 \left( \frac{\bar{\omega} \Omega}{\omega} \left( \frac{1}{1 - \omega_0^2 / \omega^2} \right) \right). \quad (65)$$

$A'''(\omega)$  tende a 0 quando  $\omega \rightarrow \pm \omega_0$  e tende a 1 quando  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \pm \infty$ . Pertanto  $A''' = A'''(\omega)$  rappresenta la risposta in ampiezza di un filtro taglia-banda. Quando l'argomento di  $A'''(\omega)$  è uguale a  $\pm 1$  si hanno, rispettivamente, le pulsazioni di taglio a 3dB superiore e inferiore,  $\omega_- = 2\pi f_1$  e  $\omega_+ = 2\pi f_2$ . Esse valgono

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{\Omega}{2} \quad \text{se} \quad \frac{\Omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (66)$$

Il filtro taglia-banda è centrato alla pulsazione  $\omega_0$  e la larghezza della banda oscura è  $\omega_+ - \omega_- \cong \Omega$ .

La trasformazione LPF  $\rightarrow$  RBF, appena descritta, è equivalente a sostituire nella funzione di trasferimento corrispondente  $s$  con  $(\Omega \bar{\omega}) [s / (s^2 + \omega_0^2)]$ .



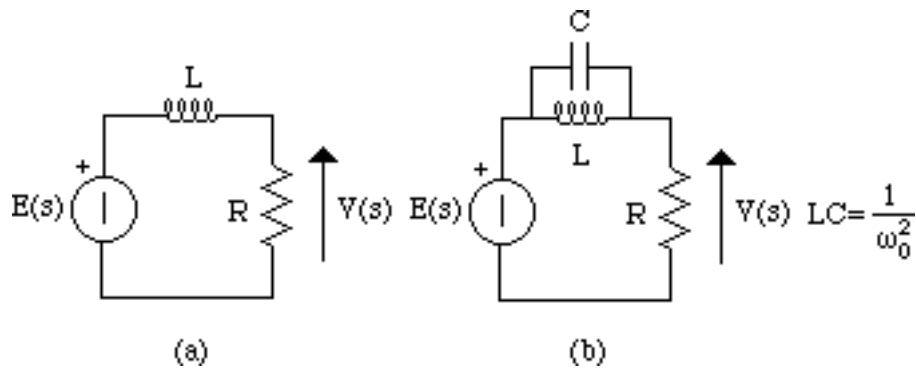


Figura 18 Prototipo passa-basso (a) e filtro taglia-banda ottenuto attraverso la trasformazione  $\text{LPF} \rightarrow \text{RBF}$  (b).

### Esempio

Il circuito in figura 18a realizza un filtro passa-basso con pulsazione di taglio a 3dB uguale a  $R/L$ . Il circuito di figura 18b, ottenuto operando la trasformazione  $\text{LPF} \rightarrow \text{RBF}$ , realizza un filtro taglia-banda con pulsazioni di taglio a 3dB inferiore e superiore uguali a  $\omega_0 \pm R/(2L)$  se  $\omega_0 \gg R/L$ ; in questo limite la banda oscura a 3dB è  $(-R/(2L) + \omega_0, R/(2L) + \omega_0)$ . Le corrispondenti risposte in ampiezza sono riportate in figura 19.

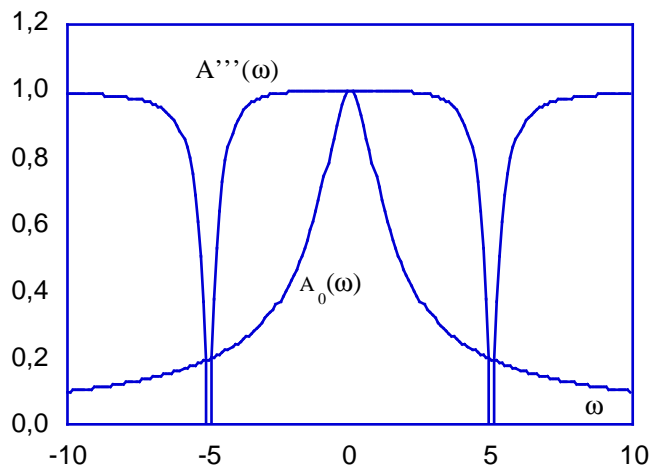












Figura 19

La risposta del filtro passa-basso di figura 18a è massima quando l'impedenza dell'induttore è zero, e ciò accade per  $\omega = 0$ , ed è minima quando l'impedenza è infinita, e ciò accade per  $\omega \rightarrow \infty$ . Sostituendo l'induttore con il parallelo LC, il massimo della risposta in ampiezza si ha quando l'impedenza equivalente del parallelo LC è uguale a zero, e ciò, in questo caso, accade per  $\omega = 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ , e il minimo della risposta in ampiezza si ha quando l'impedenza del parallelo LC è infinita, e ciò, in questo caso, accade per  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (condizione di risonanza RLC parallela). In questo modo viene “invertita” e “traslata” la risposta in ampiezza del filtro passa-basso, e si ottiene il filtro taglia-banda.

Per le trasformazioni  $\text{LPF} \rightarrow \text{BPF}$  e  $\text{LPF} \rightarrow \text{RBF}$  le frequenze di taglio della banda passante  $f_{1p}$  e  $f_{2p}$  e della banda oscura  $f_{1s}$  e  $f_{2s}$  scalano come  $\Omega$  e i margini  $\alpha_p$  e  $\alpha_s$  restano inalterati, così come resta inalterato il rapporto di transizione.

Tabella III. Regole di trasformazione ( $\bar{\omega} = 1$ ):  $\omega_t$ ,  $\omega_+$  e  $\omega_-$  sono le pulsazioni di taglio a 3dB.

Reattanze LPF $A_0(\omega)$	LPF $\rightarrow$ LPF	LPF $\rightarrow$ HPF	LPF $\rightarrow$ BPF	LPF $\rightarrow$ RBF
 $L_k$	 $L_k^* = (L_k \bar{\omega}) / \Omega$	 $C_k' = 1 / (\bar{\omega} \Omega L_h)$	 $L_k'' = (L_h \bar{\omega}) / \Omega$ $L_k'' C_k'' = 1 / \omega_0^2$	 $C_k''' = 1 / (\bar{\omega} \Omega L_h)$ $L_k''' C_k''' = 1 / \omega_0^2$
 $C_h$	 $C_h^* = (C_h \bar{\omega}) / \Omega$	 $L_h' = 1 / (\bar{\omega} \Omega C_h)$	 $C_h'' = (C_h \bar{\omega}) / \Omega$ $L_h'' C_h'' = 1 / \omega_0^2$	 $L_h''' = 1 / (\bar{\omega} \Omega C_h)$ $L_h''' C_h''' = 1 / \omega_0^2$
$\omega_t = 1$ $A_0(0) = 1$	$\omega_t = \Omega$ $A^*(0) = 1$	$\omega_t = \Omega$ $A'(\pm\infty) = 1$	$\omega_- = \omega_0 - \Omega / 2$ $\omega_+ = \omega_0 + \Omega / 2$ $A''(\pm\omega_0) = 1.$	$\omega_- = \omega_0 - \Omega / 2$ $\omega_+ = \omega_0 + \Omega / 2$ $A'''(0) = 1,$ $A'''(\pm\infty) = 1.$

In Tabella III riassumiamo le regole di trasformazione che abbiamo esposto. Dalle specifiche su  $\kappa$ ,  $\alpha_p$  e  $\alpha_s$  - che, come già osservato, sono le stesse per il prototipo e per il filtro da realizzare attraverso le trasformazioni - è possibile determinare  $A_0 = A_0(\omega)$  e quindi il circuito prototipo  $N_0$ . Una volta determinato il prototipo, applicando le trasformazioni riportate in Tabella III, si determina il circuito che realizza il filtro voluto. Le trasformazioni appena descritte possono essere applicate direttamente alla funzione di trasferimento del prototipo e ottenere, così, la funzione di trasferimento del filtro desiderato.

## 11.6 Sintesi di funzioni di trasferimento tramite elementi attivi

In questo paragrafo illustreremo un procedimento semplice e di vasta applicabilità per la progettazione di circuiti con funzioni di trasferimento di interesse applicativo.

La realizzazione di poli complessi con elementi passivi richiede l'uso di induttori e condensatori. Gli induttori per molte ragioni sono da evitare nella progettazione di filtri. Ad esempio, per realizzare filtri passa-basso con frequenze di taglio basse c'è bisogno di induttori con induttanze elevate e quindi con dimensioni che possono essere incompatibili con la moderna tecnologia dei circuiti integrati (in un filtro passa basso del secondo ordine con una frequenza di taglio di 1kHz c'è bisogno di induttanze dell'ordine del mH; induttori con queste induttanze hanno dimensioni caratteristiche dell'ordine della decina di centimetri). È stato già mostrato che, usando un amplificatore operazionale e due condensatori è possibile realizzare funzioni di trasferimento con due poli complessi coniugati.

Circuiti di questo tipo sono alla base della sintesi attiva. Il limite di questi circuiti è che gli amplificatori operazionali (intesi come componenti fisici), sono essi stessi dei filtri passa-basso, con frequenze di taglio che non superano le centinaia di kHz.

Il blocco funzionale di base nella progettazione di un filtro attivo è il cosiddetto filtro di Sallen-Key, illustrato in figura 20;  $Y_1(s)$ ,  $Y_2(s)$ ,  $Y_3(s)$  e  $Y_4(s)$  sono quattro ammettenze da assegnare.

È facile mostrare che la tensione  $V(s)$  è legata alla tensione  $V_4(s)$  attraverso la relazione

$$V = kV_4, \quad (67)$$

dove

$$k = \frac{R_a + R_b}{R_b}. \quad (68)$$

La corrente nell'ammettenza  $Y_2$  è uguale a quella che circola nell'ammettenza  $Y_4$ , perché la corrente nel morsetto non invertente dell'amplificatore operazionale è uguale a zero; pertanto si ha

$$V_4 = \frac{Y_2}{Y_2 + Y_4} V_a. \quad (69)$$

Applicando, ora, la prima legge di Kirchhoff al nodo al quale sono collegate le ammettenze  $Y_1(s)$ ,  $Y_2(s)$  e  $Y_4(s)$ , si perviene all'equazione

$$(E - V_a)Y_1 = V_4Y_4 + (V_a - V)Y_3. \quad (70)$$

Combinando le (67), (69) e (70) si ottiene:

$$H(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{kY_1Y_2}{Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3) + Y_1Y_2 + (1 - k)Y_2Y_3}. \quad (71)$$

Il circuito esaminato si comporta in uscita come un generatore di tensione controllato in tensione.

Se  $Y_i = 1/R_i$  o  $Y_i = sC_i$ , allora è possibile realizzare una funzione di trasferimento con al più una coppia di poli, sia reali che complessi coniugati e uno zero doppio nell'origine del piano complesso.

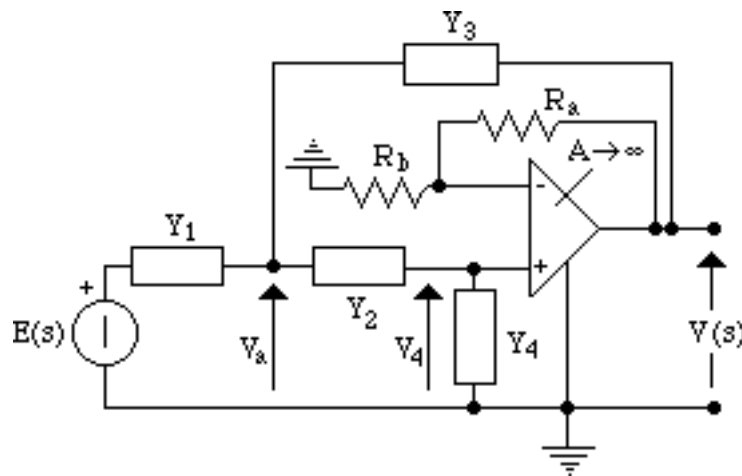


Figura 20 Blocco funzionale di Sallen-Key.

Scegliendo le ammettenze  $Y_1(s)$ ,  $Y_2(s)$ ,  $Y_3(s)$  e  $Y_4(s)$  e le resistenze  $R_a$  e  $R_b$  in modo opportuno è possibile realizzare diversi tipi di funzioni di trasferimento.

- Amplificatore ideale con guadagno  $k$

$$Y_1 = \infty, Y_2 = \infty, Y_3 = 0, Y_4 = 0 \Rightarrow H(s) = k, \quad (72)$$

( $Y = 0$  è l'ammettenza di un circuito aperto e  $Y = \infty$  è l'ammettenza di un corto circuito.)

- Filtro passa-basso del primo ordine

$$Y_1 = \infty, Y_2 = R^{-1}, Y_3 = 0, Y_4 = sC \Rightarrow H(s) = \frac{k}{1 + s/\Omega}, \quad (73)$$

dove  $\Omega = 1/RC$ .

- Filtro passa-alto del primo ordine

$$Y_1 = \infty, Y_2 = sC, Y_3 = 0, Y_4 = R^{-1} \Rightarrow H(s) = k \frac{s/\Omega}{1 + s/\Omega}, \quad (74)$$

dove  $\Omega = 1/RC$ .

- Filtri passa-basso del secondo ordine ( $Q \approx 1$ )

$$Y_1 = R_1^{-1}, Y_2 = R_2^{-1}, Y_3 = sC_1, Y_4 = sC_2, R_a = 0, R_b = \infty$$

$$H(s) = \frac{1}{(s/\Omega)^2 + (1/Q)(s/\Omega) + 1} \quad (75)$$

dove  $\Omega = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$  e  $Q = (R_1 + R_2)C_2 / \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$ ;

$$Y_1 = R^{-1}, Y_2 = R^{-1}, Y_3 = sC, Y_4 = sC$$

$$H(s) = \frac{k}{(s/\Omega)^2 + (1/Q)(s/\Omega) + 1}, \quad (76)$$

dove  $\Omega = 1/RC$  e  $Q = 1/(3-k)$ .

- Filtro passa-alto del secondo ordine ( $Q \approx 1$ )

$$Y_1 = sC, Y_2 = sC, Y_3 = R^{-1}, Y_4 = R^{-1}$$

$$H(s) = \frac{k(s/\Omega)^2}{(s/\Omega)^2 + (s/\Omega)(1/Q) + 1}, \quad (77)$$

dove  $\Omega = 1/RC$  e  $Q = 1/(3-k)$ .

Questi blocchi possono essere usati per progettare un filtro passa-basso (ad esempio, di Butterworth) o un filtro passa-alto, di qualsiasi ordine. Si noti che la funzione di trasferimento di un filtro passa-alto può essere vista come la funzione di trasferimento di un filtro passa basso dove al posto di  $s$  c'è  $(1/s)$ .

Il primo passo per realizzare un filtro passa-basso di ordine assegnato consiste nel decomporre la funzione di trasferimento del filtro nella forma

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H_0 \cdot H_1(s) \cdot H_2(s) \dots H_m(s), \quad (78)$$

dove

$$H_k(s) = \frac{\alpha_k}{s + \alpha_k} \quad \alpha_k > 0, \quad (79)$$

per ciascun polo reale  $s = -\alpha_k$ , oppure:

$$H_k(s) = \frac{\beta_k}{s^2 + 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} \quad \alpha_k > 0 \text{ e } \beta_k > 0, \quad (80)$$

per ciascuna coppia di poli complessi coniugati  $s = -\alpha_k \pm i\beta_k$ ;

$$H_0 = H(0), \quad (81)$$

è una costante uguale al guadagno in continua. A questo punto la funzione di trasferimento (78) può essere sintetizzata da una configurazione di  $(m+1)$  blocchi di Sallen-Key in cascata, così come illustrato in figura 21, in cui ogni doppio bipolo denominato con  $H_k(s)$ , è un blocco di Sallen-Key con una funzione di trasferimento del tipo (73) o (75). Il doppio bipolo all'estrema destra denota un amplificatore ideale. In modo del tutto analogo è possibile realizzare un filtro passa-alto di ordine qualsiasi, utilizzando i blocchi corrispondenti alle funzioni di trasferimento (74) e (77).

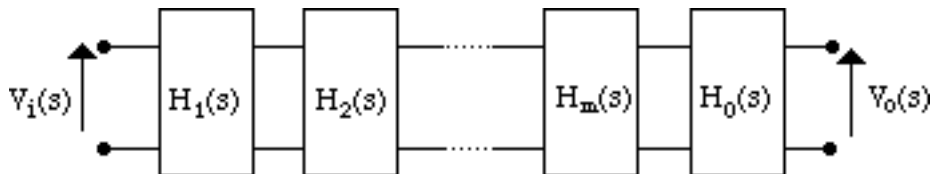


Figura 21 Realizzazione in cascata di  $H(s) = H_0 \cdot H_1(s) \cdot H_2(s) \dots H_m(s)$ .

I filtri passa-banda e taglia-banda possono essere realizzati usando blocchi di Sallen-Key del secondo ordine con elevati fattori di merito,  $Q \gg 1$  (blocchi risonanti).

Un filtro passa-banda può essere realizzato anche connettendo in cascata un filtro passa-basso con pulsazione di taglio  $\Omega_+$  e un filtro passa-alto con pulsazione di taglio  $\Omega_-$  e imporre che sia  $\Omega_+ > \Omega_-$ ; la banda passante del filtro passa banda è all'incirca  $(\Omega_-, \Omega_+)$ . Un filtro taglia-banda può essere realizzato anche connettendo in parallelo un filtro passa-basso con un filtro passa-alto e imponendo che sia  $\Omega_+ < \Omega_-$ ; la banda oscura del filtro è all'incirca  $(\Omega_+, \Omega_-)$ .

