

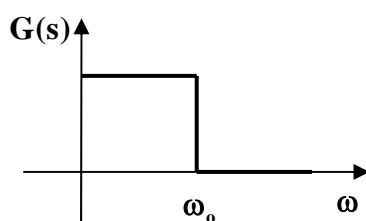
FILTRI ATTIVI

Un quadripolo che, nella trasmissione dei segnali dai suoi terminali di ingresso a quelli di uscita, presenti caratteristiche selettive, ovvero discriminatorie relativamente alla frequenza, viene detto filtro. Un filtro attivo è un quadripolo filtrante che contiene un dispositivo (amplificatore) in grado di produrre una amplificazione del segnale filtrato.

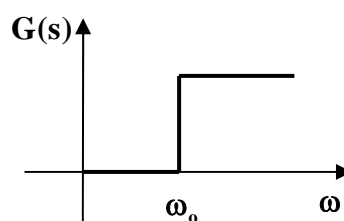
I vari tipi di filtro

I filtri attivi, così come quelli passivi, possono essere classificati in cinque grandi categorie:

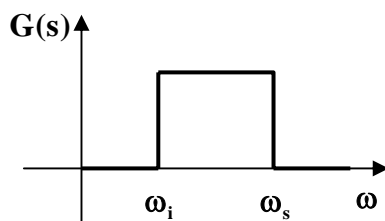
1. - passa-basso ;
2. - passa-alto ;
3. - passa-banda ;
4. - elimina banda ;
5. - equalizzatori di ampiezza o di fase .



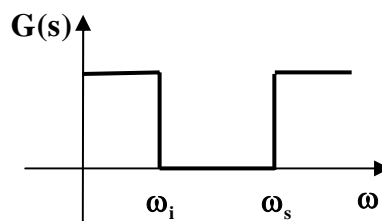
Passa-basso



Passa-alto



Passa-banda



Elimina-banda

In figura sono riportati gli andamenti delle f.d.t. ideali in funzione della pulsazione.

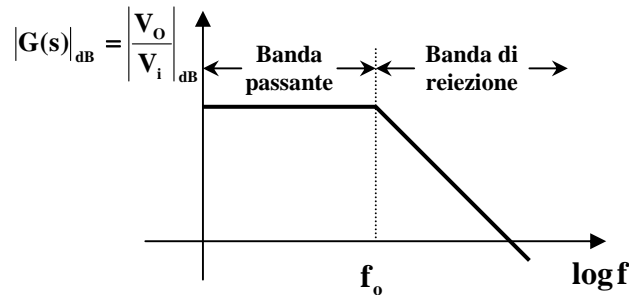
Un filtro che presenti una f.d.t. ideale è, tuttavia, irrealizzabile in pratica, poiché la funzione matematica della caratteristica ideale non è razionale, e ne è impossibile una realizzazione fisica.

È necessario quindi usare tecniche di approssimazione per simulare il comportamento ideale; si tratta, cioè, di trovare delle funzioni razionali nella variabile complessa s che abbiano un andamento, per $s = j\omega$ (cioè sull'asse reale del piano s) che si approssima il più possibile a quello ideale. L'approssimazione a cui si può arrivare è tanto più spinta quanto più elevato è l'ordine della f.d.t. in s (grado del polinomio in s) che viene impiegata.

Filtro passa-basso

Si definisce filtro passa-basso un dispositivo che permette ad un segnale entrante di attraversarlo con una piccola o nessuna attenuazione fino a una certa frequenza; al di sopra di questa frequenza il filtro attenua o taglia il segnale di ingresso.

Nello studio dei filtri attivi è essenziale determinare la relazione esistente tra la tensione di uscita del filtro e la sua tensione in ingresso alle varie frequenze, detta **risposta in frequenza**, che è rappresentata schematicamente in figura.



Il guadagno di tensione del filtro, il rapporto $\frac{V_o}{V_i}$, esprime la risposta in ampiezza in funzione della frequenza.

Tale rapporto è espresso in decibel, cioè: $\left| \frac{V_o}{V_i} \right|_{dB} = 20 \log \frac{V_o}{V_i}$.

La risposta in ampiezza di un filtro passa-basso è essenzialmente costante fino alla frequenza f_0 , detta **frequenza di taglio** (o **frequenza di cutoff**).

Si definisce **ottava** il raddoppio o il dimezzamento della frequenza:

ottave inferiori ...; 125Hz; 250Hz; 500Hz;
1KHz;

ottave superiori 2KHz; 4KHz; 8KHz;...

Si definisce **decade** l'incremento o il decremento di 10 volte della frequenza:

decadi inferiori ...; 1Hz; 10Hz; 100Hz;
1KHz;

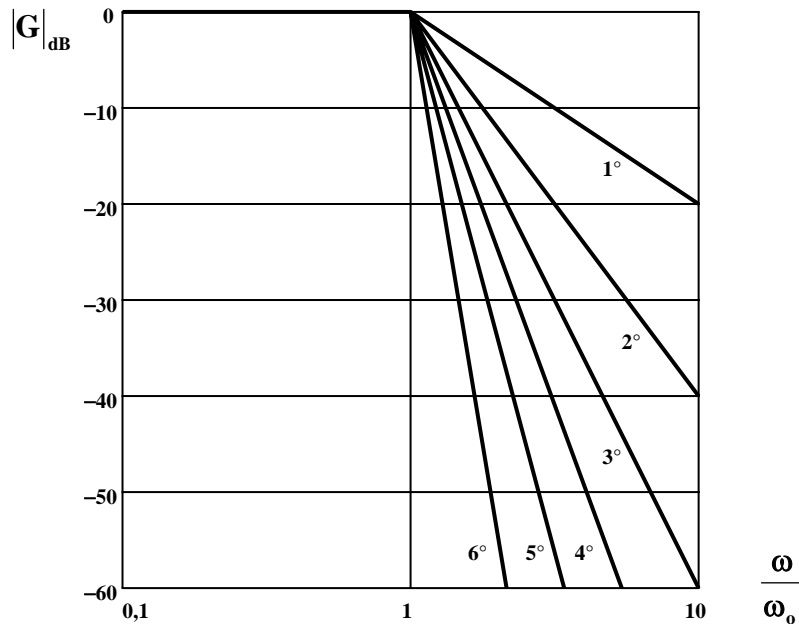
decadi superiori 10KHz; 100KHz; 1MHz;...

La risposta in ampiezza nella banda di reiezione diminuisce linearmente all'aumentare del logaritmo della frequenza.

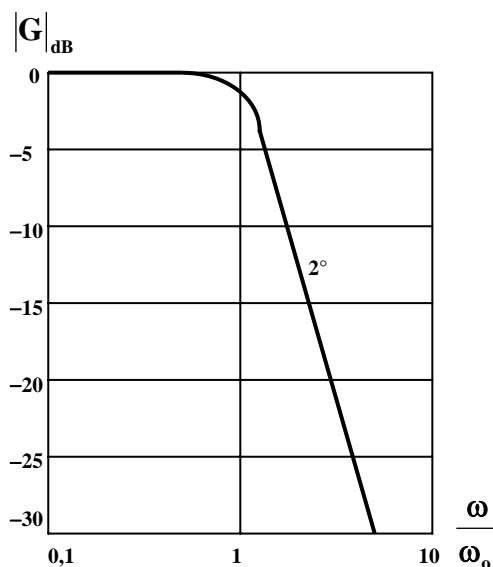
La velocità di diminuzione (o pendenza della curva), detta **roll-off** o **fall-off**, definisce l'ordine del filtro. Sopra la frequenza di **cutoff** il **roll-off** del filtro passa-basso di 1° **ordine** è di **6dB/ottava** o **20dB/decade**. Cioè ad un raddoppio della frequenza si ha una

diminuzione dell'ampiezza di 6dB; mentre a un aumento di 10 volte della frequenza una diminuzione di 20dB.

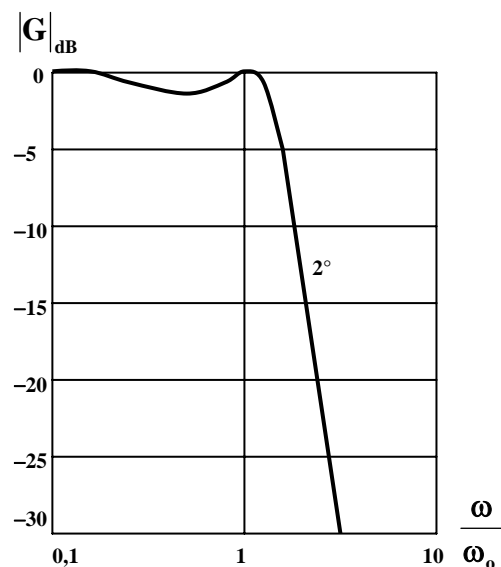
Un filtro passa basso di **2° ordine** ha un roll-off doppio di quello di un filtro del 1° ordine, **12dB/ottava** o **40dB/decade**; un filtro del **3° ordine** un roll-off di **18dB/ottava** o **60dB/decade**; ecc.... La figura mostra che aumentando l'ordine del filtro aumenta l'attenuazione. Naturalmente, un filtro di ordine infinito avrebbe una risposta ideale.



Essendo i diagrammi finora visti delle schematizzazioni della risposta in ampiezza di un filtro passa-basso, la frequenza di taglio risulta come definente una netta separazione tra la banda passante e quella di reiezione. In realtà la frequenza di taglio di un filtro è quella frequenza alla quale il guadagno in tensione diminuisce di un fattore $\sqrt{2}$ o di **3dB**. Il grafico di figura descrive un particolare tipo di curva ed indica l'andamento della risposta ampiezza/frequenza di un filtro che presenta la stessa frequenza di taglio qualunque sia l'ordine e banda massimamente piatta, definita risposta di **Butterworth**.



Butterworth



Chebyshev

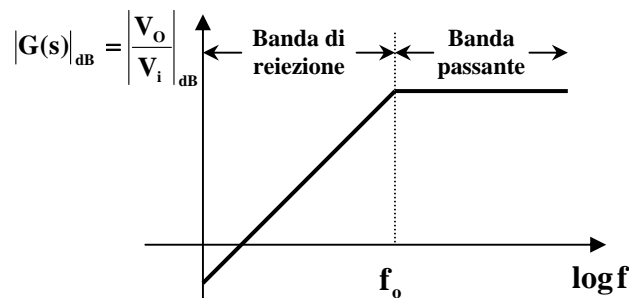
In alternativa possiamo avere un andamento della risposta simile a quella del secondo grafico, che presenta una **ondulazione** o **ripple** nella banda passante, caratteristica del filtro di **Chebyshev**.

Un fattore che determina un particolare tipo di andamento nella banda passante è il **fattore di smorzamento** indicato con $2\alpha = \frac{1}{Q_0}$. Lo smorzamento di una sezione di un

filtro del 2° ordine è la misura della sua tendenza ad oscillare. La risposta di Butterworth è un esempio di filtri smorzati, mentre quella di Chebyshev caratterizza filtri poco smorzati.

Filtro passa-alto

La risposta in frequenza generalizzata di un filtro passa-alto è l'opposto di un filtro passa-basso; attenua i segnali al di sotto della frequenza di taglio e permette ai segnali al di sopra di essa di attraversarlo con una piccola o nessuna attenuazione.



La risposta in ampiezza nella banda passante è essenzialmente costante, mentre al di sotto della frequenza di taglio diminuisce con una pendenza che dipende dall'ordine del filtro.

Tutto ciò che è stato detto per i filtri passa-basso vale anche per quelli passa-alto.

In realtà non sarà mai possibile avere un filtro passa-alto ideale perché la zona superiore della banda passante è limitata dalla risposta in frequenza del particolare tipo di amplificatore operazionale usato.

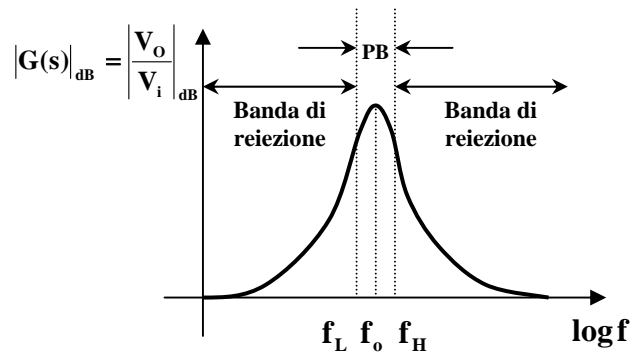
2.3. – Filtro passa-banda

Un filtro passa-banda lascia passare un ben definito campo di frequenze, mentre le altre, al di sotto e al di sopra di questo campo, vengono attenuate.

Della risposta in ampiezza di un filtro passa-banda interessa particolarmente la **frequenza centrale** e l'**ampiezza della banda passante**.

La frequenza centrale è in generale il punto dove si ha il massimo guadagno in tensione. L'ampiezza di banda è data dalla differenza tra la frequenza di taglio superiore e quella inferiore, cioè:

$$\text{banda passante} = BW = f_H - f_L.$$



Poiché tutte le curve sono tracciate in scala logaritmica, la curva della banda passante sarà simmetrica rispetto alla frequenza centrale. Questo è importante da ricordare, perché si potrebbe concludere che la frequenza centrale f_0 è la media aritmetica delle due frequenze a **3dB**, il che non è vero (scala logaritmica della frequenza). Infatti, la frequenza centrale è la media geometrica delle frequenze di taglio, cioè:

$$f_0 = \sqrt{f_H * f_L} .$$

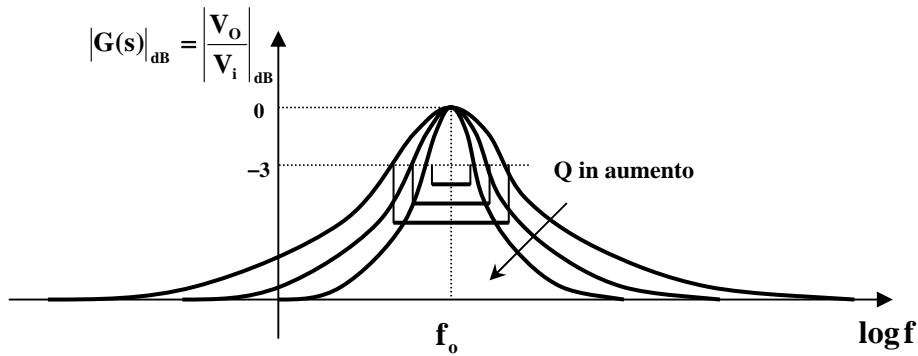
Si calcola f_H e f_L in funzione di f_0 e **BW**:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbf{BW} = f_H - f_L \\ (f_0)^2 = f_H * f_L \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f_H = f_L + \mathbf{BW} \\ (f_0)^2 = (f_L)^2 + f_L * \mathbf{BW} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} f_H = f_L + \mathbf{BW} \\ f_L = \frac{-\mathbf{BW} \pm \sqrt{(\mathbf{BW})^2 + 4(f_0)^2}}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f_H = f_L + \mathbf{BW} \\ f_L = \frac{-\mathbf{BW} + \sqrt{(\mathbf{BW})^2 + 4(f_0)^2}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ampiezza di banda e la sua frequenza centrale sono in relazione tra loro mediante l'inverso del fattore di smorzamento Q_0 :

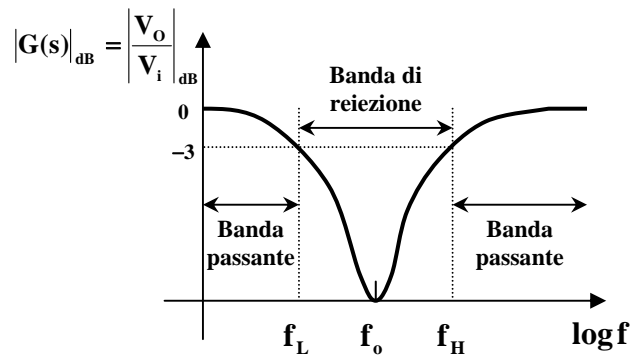
$$Q_0 = \frac{f_0}{\mathbf{BW}} = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{\sqrt{f_H * f_L}}{f_H - f_L} .$$

Il coefficiente Q_0 di un filtro passa-banda definisce la ripidezza della risposta in ampiezza per frequenze diverse da f_0 . Se a parità di f_0 si diminuisce la banda passante Q_0 aumenta.



Filtro a reiezione di banda

Un filtro a reiezione di banda (**NOTCH**) ha una risposta in frequenza che è l'opposto di quella di un filtro passa-banda.



Questo filtro elimina un intervallo di frequenze e lascia passare le altre. La definizione di banda di reiezione e di Q_0 sono le stesse del filtro passa-banda.

QUADRIPOLI DEL I° ORDINE

I quadripoli del I° ordine possono realizzare f.d.t. di tipo passa-basso e passa-alto. Essi sono:

passa basso
$$G(s) = \frac{K}{s + \omega_0}$$

passa basso
$$G(s) = \frac{Ks}{s + \omega_0}$$

dove ω_0 è la pulsazione di taglio.

Quadripolo passa-basso

Ponendo $s = j\omega$ e dividendo numeratore e denominatore per ω_0 , si ottiene la f.d.t. normalizzata (cioè in $\frac{\omega}{\omega_0}$):

$$G(j\omega) = \frac{\frac{K}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{\frac{K}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

dove $A_0 = \frac{K}{\omega_0}$; il cui modulo e fase sono:

$$|G(j\omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Modulo

Passando ai decibel, si ha:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 20 \log A_0 - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \\ &= 20 \log A_0 - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

- per $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_0$ primo asintoto
- per $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_0 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$
secondo asintoto

Il diagramma asintotico di Bode di $|G(j\omega)|_{dB}$ sarà costituito da due asintoti:

- il primo $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_0$ è una retta parallela all'asse delle ascisse di ordinata $-20 \log A_0$;

- il secondo $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_o - 20 \log \frac{\omega}{\omega_o}$ è una retta decrescente con pendenza di $-\frac{\pi}{4}$ (-45°), che incontra per $\omega = \omega_o$ il primo asintoto.

Fase $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_o}$

- per $\omega \ll \omega_o \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_o} \ll 1 \Rightarrow \varphi = 0$ primo asintoto
- per $\omega \gg \omega_o \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_o} \gg 1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ secondo asintoto

Il primo asintoto corrisponde all'asse delle ascisse; il secondo a una parallela all'asse delle ascisse di ordinata $-\frac{\pi}{2}$.

Supponendo poi che:

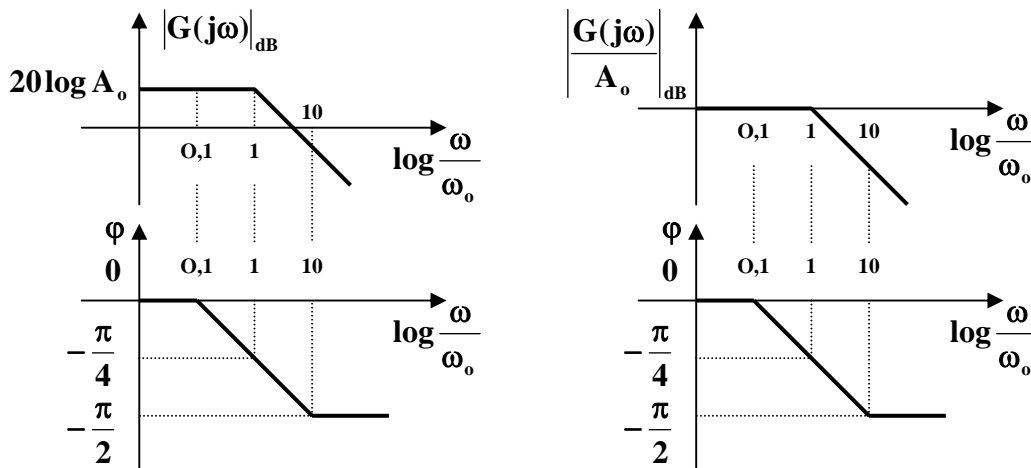
$$\omega \ll \omega_o \quad \text{significati} \quad \omega \leq 0,1\omega_o \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_o} \leq 0,1 \quad \text{e}$$

$$\omega \gg \omega_o \quad \text{significati} \quad \omega \geq 10\omega_o \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_o} \geq 10,$$

si può disegnare il terzo asintoto collegando il punto di coordinate $\left(\varphi = 0 ; \frac{\omega}{\omega_o} = 0,1\right)$

con quello di coordinate $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2} ; \frac{\omega}{\omega_o} = 10\right)$.

I diagrammi asintotici di Bode sono, quindi, i seguenti.



Dividendo ambo i membri di $G(j\omega)$ per A_o si ottiene la f.d.t. normalizzata con guadagno unitario, il cui modulo e fase sono:

$$\left| \frac{G(j\omega)}{A_o} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}} \quad ; \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_o} .$$

Quanto detto per $|G(j\omega)|_{dB}$ vale anche per la f.d.t. normalizzata con guadagno unitario;

$$\left| \frac{G(j\omega)}{A_o} \right|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right]$$

L'unica differenza consiste nel fatto che l'asintoto orizzontale del modulo coincide con l'asse delle ascisse (essendo il guadagno unitario il guadagno in dB è nullo per $\omega = 0$). Alla frequenza di taglio, cioè per $\omega = \omega_o$, si ha una attenuazione di

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_o - 10 \log(1 + 1) = 20 \log A_o - 3dB$$

Quadripolo passa-alto

Ponendo $s = j\omega$ e dividendo numeratore e denominatore per ω_o , si ottiene la f.d.t. normalizzata (cioè in $\frac{\omega}{\omega_o}$):

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{\omega_o}{s}} = \frac{K}{1 + j \frac{\omega_o}{\omega}} = \frac{A_o}{1 + j \frac{\omega_o}{\omega}} = \frac{A_o}{1 + j \frac{f_o}{f}}$$

dove $A_o = K$; il cui modulo e fase sono:

$$|G(j\omega)| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}} \quad ; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_o}{\omega}$$

Modulo

Passando ai decibel, si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{A_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}} = 20 \log A_o - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2} =$$

$$= 20 \log A_o - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \right]$$

- per $\omega \ll \omega_o \Rightarrow \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_o + 20 \log \frac{\omega}{\omega_o}$
primo asintoto
- per $\omega \gg \omega_o \Rightarrow \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_o$ secondo asintoto

Il diagramma asintotico di Bode di $|G(j\omega)|_{dB}$ sarà costituito da due asintoti:

- il primo $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_o - 20 \log \frac{\omega_o}{\omega}$ è una retta crescente con pendenza di $\frac{\pi}{4}$ (45°), che incontra per $\omega = \omega_o$ il primo asintoto.
- il secondo $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log A_o$ è una retta parallela all'asse delle ascisse di ordinata $20 \log A_o$;

Fase $\varphi = -\arctg \frac{\omega_o}{\omega}$

- per $\omega \ll \omega_o \Rightarrow \frac{\omega_o}{\omega} \gg 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ primo asintoto
- per $\omega \gg \omega_o \Rightarrow \frac{\omega_o}{\omega} \ll 1 \Rightarrow \varphi = 0$ secondo asintoto

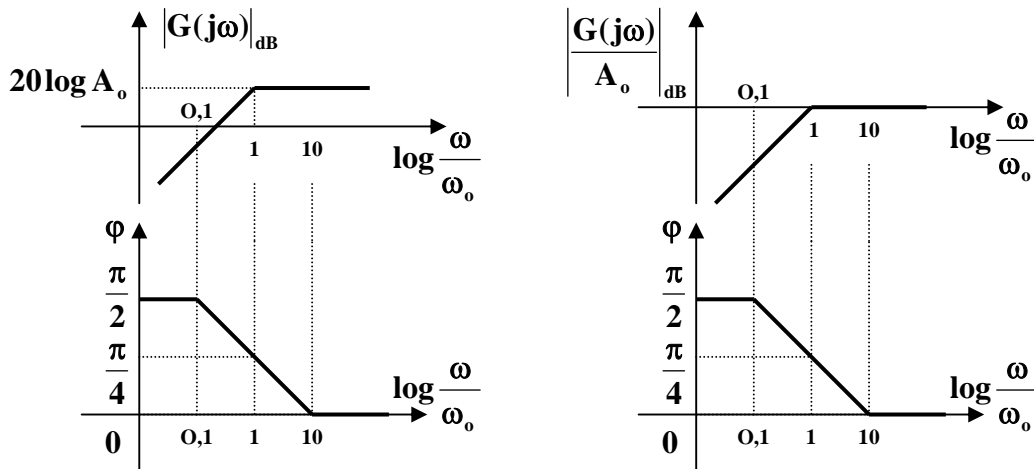
Il primo asintoto è una parallela all'asse delle ascisse di ordinata $\frac{\pi}{4}$; il secondo coincide con l'asse delle ascisse.
Supponendo poi che:

$$\omega \ll \omega_o \quad \text{significati} \quad \omega \leq 0,1\omega_o \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_o} \leq 0,1 \quad \text{e}$$

$$\omega \gg \omega_0 \quad \text{significati} \quad \omega \geq 10\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_0} \geq 10 ,$$

Si disegna il terzo asintoto collegando il punto di coordinate $\left(\varphi = \frac{\pi}{2} ; \frac{\omega}{\omega_0} = 0,1 \right)$ con quello di coordinate $\left(\varphi = 0 ; \frac{\omega}{\omega_0} = 10 \right)$.

I diagrammi asintotici di Bode sono, quindi, i seguenti.



Dividendo ambo i membri di $\mathbf{G(j\omega)}$ per $\mathbf{A_0}$ si ottiene la f.d.t. normalizzata con guadagno unitario, il cui modulo e fase sono:

$$\left| \frac{\mathbf{G(j\omega)}}{\mathbf{A_0}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad ; \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega_0}{\omega} .$$

Quanto detto per $|\mathbf{G(j\omega)}|_{dB}$ vale anche per la f.d.t. normalizzata con guadagno unitario;

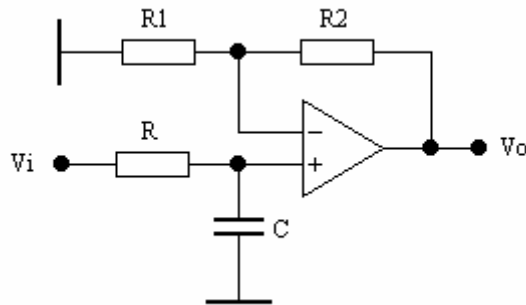
$$\left| \frac{\mathbf{G(j\omega)}}{\mathbf{A_0}} \right|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$$

L'unica differenza consiste nel fatto che l'asintoto orizzontale del modulo coincide con l'asse delle ascisse (essendo il guadagno unitario il guadagno in dB è nullo per $\omega = \omega_0$).

FILTRI ATTIVI DEL 1° ORDINE

Filtro passa-basso

La configurazione base di un filtro passa-basso del 1° ordine è una combinazione di un filtro RC passivo con un amplificatore operazionale in configurazione non invertente.



Considerando ideale l'amplificatore operazionale e per l'equipotenzialità degli ingressi, si ha:

$$V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o \quad ; \quad V_+ = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} V_i = \frac{1}{1 + sRC} V_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o = \frac{1}{1 + sRC} V_i \Rightarrow G(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + sRC}$$

Ponendo $RC = \frac{1}{\omega_0}$ e $s = j\omega \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

dove $A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ è l'amplificazione in configurazione non invertente.

La $G(j\omega)$ così ottenuta è la **f.d.t.** normalizzata di un filtro passa-basso.

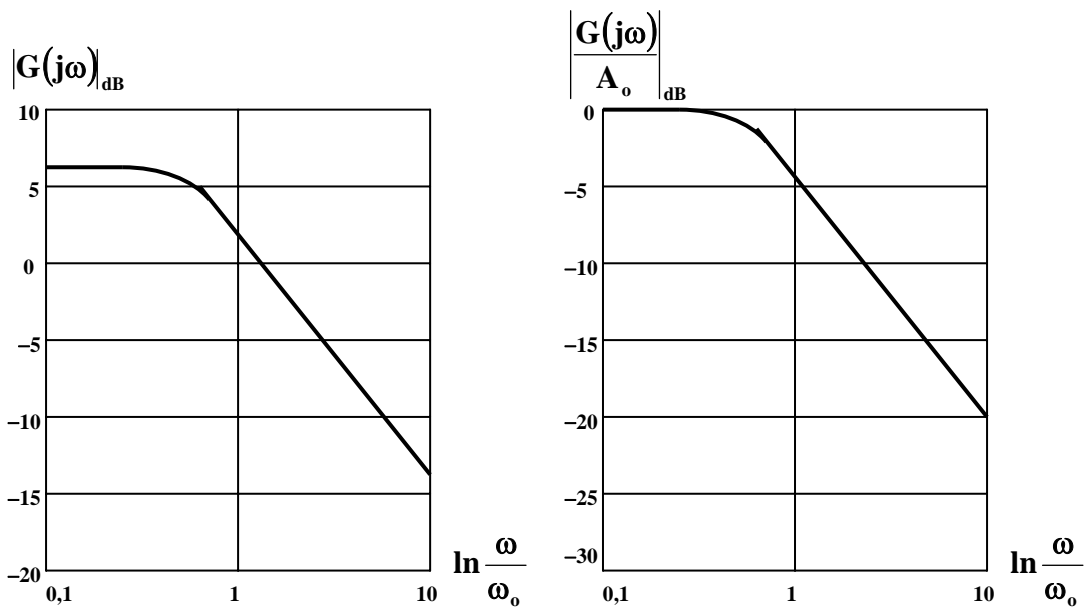
Il modulo e la fase sono:

$$|G(j\omega)| = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} \quad ; \quad \left| \frac{G(j\omega)}{A_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

In decibel

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 20 \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

$$\left|\frac{G(j\omega)}{A_o}\right|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

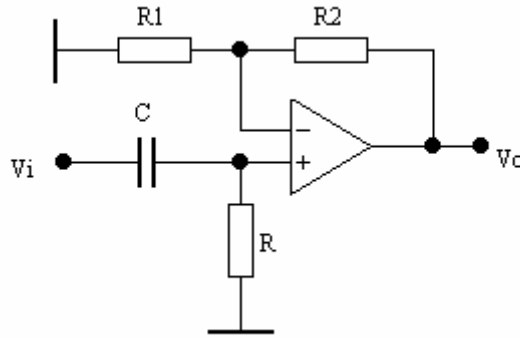


I criteri di progetto sono semplici, dovendosi determinare il gruppo **RC** e le due resistenze **R₁** e **R₂** dalle relazioni

$$RC = \frac{1}{\omega_0} \quad ; \quad R_2 = (A_o - 1)R_1 .$$

Filtro passa-alto

La configurazione base di un filtro passa-alto del 1° ordine è una combinazione di un filtro RC passivo con un amplificatore operazionale in configurazione non invertente.



Considerando ideale l'amplificatore operazionale e per l'equipotenzialità degli ingressi, si ha:

$$V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o \quad ; \quad V_+ = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} V_i = \frac{1}{1 + \frac{1}{sRC}} V_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o = \frac{1}{1 + \frac{1}{sRC}} V_i \Rightarrow G(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{sRC}}$$

Ponendo $RC = \frac{1}{\omega_0}$ e $s = j\omega \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{A_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$

dove $A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ è l'amplificazione in configurazione non invertente.

La $G(j\omega)$ così ottenuta è la **f.d.t.** normalizzata di un filtro passa-basso.

Il modulo e la fase sono:

$$|G(j\omega)| = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_0}{\omega} \quad ; \quad \left| \frac{G(j\omega)}{A_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

In decibel

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = 20 \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$$

$$\left| \frac{G(j\omega)}{A_o} \right|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^2} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^2 \right]$$

I criteri di progetto sono gli stessi di quelli del filtro passa-basso.

