

## FILTRI ANALOGICI

I filtri ideali sono caratterizzati da funzioni di trasferimento a modulo costante in banda passante, nullo in banda proibita e fase lineare. Poiché tali filtri non sono causali, essi possono essere soltanto “approssimati” da filtri fisicamente realizzabili. Il problema della realizzazione di filtri per una data applicazione non è quindi banale, e richiede almeno tre passi per la sua soluzione:

1. l’individuazione delle *specifiche* del filtro data la particolare applicazione;
2. la determinazione della funzione di trasferimento di un filtro soddisfacente le specifiche individuate;
3. la realizzazione fisica di un sistema la cui funzione di trasferimento coincide con quella determinata.

La determinazione di specifiche sufficientemente precise è il primo passo per ottenere un filtro da adottare per una data applicazione. Al fine di descrivere le specifiche del filtro che si intende realizzare, è necessaria la conoscenza dei parametri che permettano di valutare la qualità dell’approssimazione rispetto a un filtro ideale, quali la *frequenza di taglio a 3 dB*, la *frequenza di stop*, l’ampiezza della *banda di transizione*, l’*attenuazione*, la *linearità della fase*.

L’individuazione del filtro viene poi ottenuta selezionando la funzione di trasferimento di un filtro causale che soddisfa le specifiche assegnate; in questo capitolo ci limitiamo a

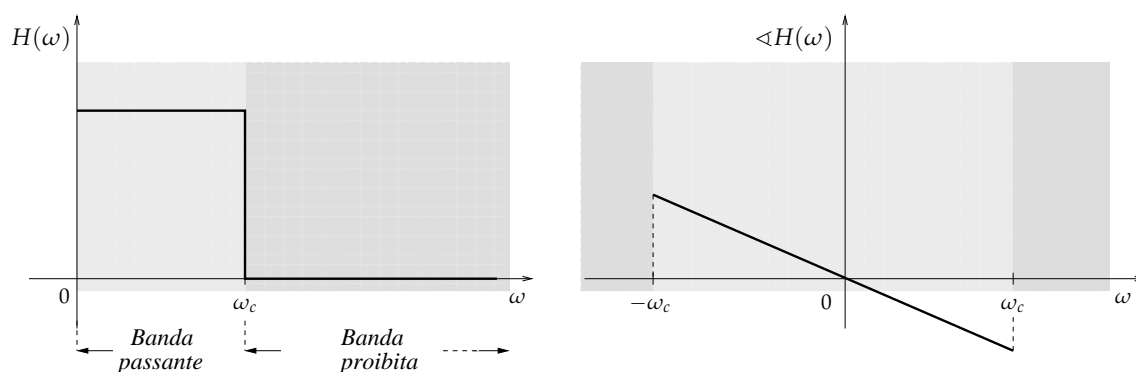
richiamare la soluzione di questo problema all'interno delle famiglie di *filtri di Butterworth e di Chebyshev*.

L'ultima fase consiste nella realizzazione fisica del sistema di cui è nota la funzione di trasferimento. Le realizzazioni fisiche possono essere classificate sulla base delle componenti costituenti il sistema: filtri a elementi *RLC passivi*, filtri a elementi *RC attivi*, filtri a *microonde*, filtri a *cristallo*, filtri *elettromeccanici*. In questo capitolo accenniamo alle tecniche di analisi per circuiti RLC passivi, richiamando i principi di Kirchoff, e alla progettazione di filtri di Butterworth mediante circuiti a elementi attivi come gli amplificatori operazionali.

### 3.1 Caratteristiche dei Filtri Analogici

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto la nozione di filtro ideale e delineato le principali tipologie: filtro passabasso, passaalto e passabanda. In questo paragrafo studiamo la realizzazione pratica di filtri ideali; faremo riferimento esclusivamente a filtri passabasso, poiché le considerazioni riportate di seguito possono essere estese senza difficoltà agli altri casi.

I grafici (modulo e fase) della tipica funzione di trasferimento di un filtro ideale sono riportati in Figura 3.1.



**Figura 3.1** Modulo e fase della funzione di trasferimento di un filtro ideale con frequenza di taglio  $\omega_c$ .

La funzione di trasferimento  $H(\omega)$  di un filtro ideale passabasso possiede le seguenti caratteristiche:

1.  $|H(\omega)|$  è costante nella banda passante ed è identicamente nullo nella banda proibita;
2. la banda passante e la banda proibita sono confinanti (separate dalla frequenza di taglio);
3. la risposta in fase  $\angle H(\omega)$  è lineare; questo significa che le varie componenti armoniche nella banda passante hanno tutte lo stesso ritardo temporale.

Purtroppo la risposta all'impulso di un sistema che realizza un filtro ideale è del tipo  $\text{sinc}(\omega_c t)$ ; essa assume valori differenti da 0 per  $t < 0$  e quindi tale sistema risulta essere non causale. Questo significa che ogni sistema realizzabile non potrà mai verificare contemporaneamente le caratteristiche 1., 2. e 3.; in questo paragrafo introduciamo alcuni parametri che descrivono la "bontà" con cui un filtro realizzabile in pratica approssima un filtro ideale.

Indicando con  $H(\omega)$  la funzione di trasferimento di un eventuale filtro passabasso realizzabile, sappiamo che  $H(\omega)$  è completamente specificata dal suo modulo  $|H(\omega)|$  e dalla sua fase  $\angle H(\omega)$ . La Figura 3.2 mostra la tipica forma di  $|H(\omega)|$  e  $\angle H(\omega)$  per un filtro passabasso realizzabile.

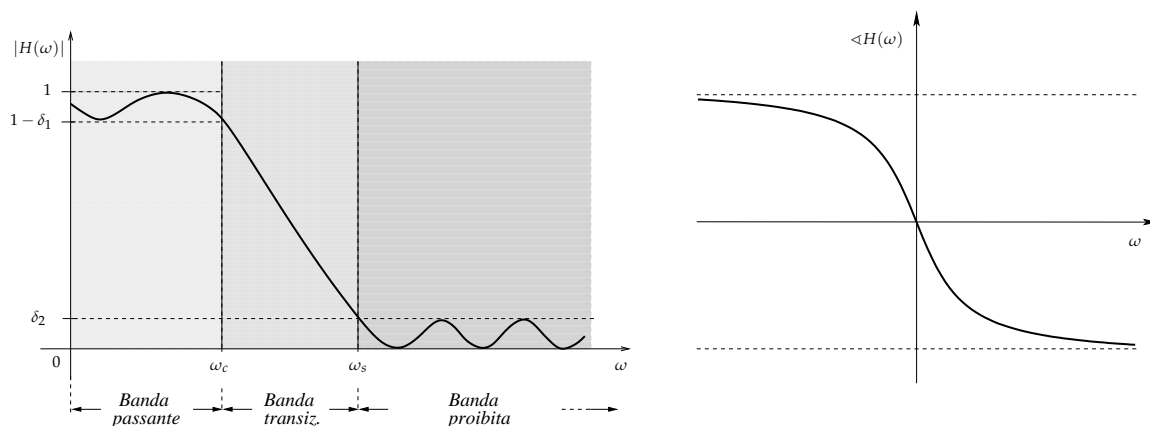


Figura 3.2 Modulo e fase di un filtro passabasso realizzabile.

Rispetto a un filtro ideale possiamo rilevare le seguenti differenze.

1. L'ampiezza  $|H(\omega)|$  non è costante nella banda passante e non è identicamente nulla nella banda proibita; si possono rilevare inoltre oscillazioni (ripple) di ampiezza non trascurabile sia nella banda passante che in quella proibita. Un parametro importante è l'ampiezza della massima oscillazione in banda proibita  $\delta_2$ , o equivalentemente, l'attenuazione  $-20 \log_{10} \delta_2$  dB.
2. La banda passante e la banda proibita non confinano, ma sono separate da una banda detta *banda di transizione*. Parametri importanti sono la frequenza di taglio  $\omega_c$  a 3 dB, la frequenza di stop  $\omega_s$  e la dimensione della banda di transizione  $\omega_s - \omega_c$ .
3. La fase  $\angle H(\omega)$  non risulta essere lineare.

Analizziamo ora separatamente il significato fisico del modulo e della fase della funzione di trasferimento di un filtro.

### Guadagno

Osserviamo innanzitutto che  $|H(\omega)|$  è collegato al concetto di *guadagno*. A tal riguardo ricordiamo che se  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  sono le trasformate di Fourier rispettivamente dell'ingresso e dell'uscita di un sistema con funzione di trasferimento  $H(\omega)$ , vale che

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega).$$

Questo implica:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{|G(\omega)|^2}{|F(\omega)|^2} = \frac{|G(\omega)|^2 d\omega}{|F(\omega)|^2 d\omega},$$

dove  $|G(\omega)|^2 d\omega$  e  $|F(\omega)|^2 d\omega$  rappresentano la potenza (o l'energia) delle componenti a frequenza tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  rispettivamente nel segnale di uscita e in quello di ingresso;

$|H(\omega)|^2$  individua allora il *guadagno*, cioè il rapporto tra la potenza (o l'energia) del segnale in uscita e quello in ingresso alle varie frequenze.

Si osservi che per filtri senza oscillazioni in banda proibita, l'attenuazione risulta essere  $-g(\omega_s)$ , dove  $\omega_s$  la frequenza di stop. In molte applicazioni, anziché considerare direttamente il grafico di  $|H(\omega)|$ , si preferisce dare il grafico del guadagno  $|H(\omega)|^2$  in scala logaritmica; il guadagno può essere pertanto convertito nel seguente numero  $g(\omega)$  di decibel:

$$g(\omega) = 10 \log_{10} |H(\omega)|^2 \text{ dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| \text{ dB}.$$

### Esempio 3.1.1.

Un sistema che a una data frequenza  $\omega$  converte un ingresso  $F(\omega)$  di 5 V in una uscita  $G(\omega)$  di 1 V, ha un guadagno a quella frequenza dato in dB da:

$$20 \log_{10} \frac{1}{5} \text{ dB} = -13.97 \text{ dB}.$$

Poiché in un filtro realizzabile la banda passante e quella proibita non confinano, bisogna attribuire un significato convenzionale alla frequenza di taglio. Una usuale nozione è quella di *frequenza di taglio a 3dB*, cioè la frequenza per la quale si ha un guadagno del 50% di quello in banda passante, che misurato in decibel equivale a

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dB} \approx -3 \text{ dB}.$$

Se  $|H(\omega)| \approx 1$  in banda passante, allora la frequenza di taglio a 3 dB è quella frequenza  $\omega_c$  per cui:

$$|H(\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}.$$

### Esempio 3.1.2.

Determinare la frequenza di taglio a 3 dB del filtro passabasso con guadagno

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(1 + \omega^2/100)}.$$

Il guadagno in banda passante 1 e la frequenza di taglio  $\omega_c$  quella per cui  $\frac{1}{(1 + \omega^2/100)} = 1/2$ . Risolvendo l'equazione si ottiene  $\omega_c = 10 \text{ Hz}$ .

Un utile nozione che permette di coprire grandi range di frequenze quella di *decade*: una decade è un intervallo tra una frequenza  $\omega$  e  $10\omega$ . La misura di attenuazione di un filtro è data usualmente in dB/decade:  $\alpha$  dB/decade significa che il filtro ha un'attenuazione di  $\alpha$  dB ogni decade di frequenza.

**Esempio 3.1.3.**

Si consideri un filtro con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  tale che

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}}.$$

Vale che:

$$10 \log_{10} |H(\omega)|^2 = -20 \log_{10}(1 + \omega^{2N}) \approx -20N \log_{10} \omega, \quad (\text{per } \omega \text{ suff. grande}).$$

L'attenuazione in banda proibita allora:

$$20N \log_{10} 10\omega - 20N \log_{10} \omega = 20N \text{ dB/decade}.$$

Un filtro non ha virtualmente attenuazione nella banda passante, mentre l'attenuazione in banda proibita è un importante parametro di prestazione del filtro. La banda proibita è data dall'insieme delle frequenze per le quali il guadagno è inferiore a una opportuna soglia di attenuazione che normalmente viene stabilita in funzione della particolare applicazione. Se indichiamo con  $\omega_s$ , come in Figura 3.2, la frequenza di stop, cioè la frequenza di inizio della banda proibita, le frequenze tra  $\omega_c$  ed  $\omega_s$  costituiscono la banda di transizione.

**Esempio 3.1.4.**

Si consideri il filtro con funzione di trasferimento

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/100)^8}.$$

Determinare l'ampiezza della banda di transizione sapendo che la frequenza di stop corrisponde ad un'attenuazione di 40 dB.

La frequenza di taglio a 3 dB di 100 Hz. La frequenza di stop  $\omega_s$  verifica per ipotesi

$$40 = -20 \log_{10} |H(\omega_s)|.$$

Risolvendo tale equazione si ottiene  $\omega_s \approx 316$  Hz. La dimensione della banda di transizione risulta  $316 - 100 = 216$  Hz.

**Linearità della fase**

Discutiamo ora l'effetto prodotto dalla non linearità della fase della funzione di trasferimento del filtro. A tal riguardo, consideriamo per semplicità un sistema che ammette una funzione di trasferimento con modulo  $|H(\omega)| = G(\omega)$  e fase  $\angle H(\omega) = \phi(\omega)$ , così che:

$$H(\omega) = G(\omega)e^{i\phi(\omega)}.$$

Il segnale (complesso)  $e^{i\omega_1 t}$  di frequenza  $\omega_1$  viene trasformato dal sistema nel segnale  $G(\omega_1)e^{i(\omega_1 t + \phi(\omega_1))}$ . Se la fase lineare, cioè  $\phi(\omega) = -t_0\omega$  per un'opportuna costante  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il segnale di uscita

$$G(\omega_1)e^{i\omega_1(t-t_0)}.$$

Il segnale di uscita risulta allora essere lo stesso segnale di ingresso ritardato di un tempo  $t_0$ , qualsiasi sia la frequenza  $\omega_1$ : una fase lineare comporta un ritardo temporale uguale per tutte le componenti armoniche.

Una fase non lineare crea invece ritardi differenti per le componenti a diversa frequenza, creando una distorsione complessiva del segnale. Per certe applicazioni (ad esempio nei modem) le distorsioni create dalla non linearità della fase devono essere eliminate quanto più possibile; in altre applicazioni la non linearità può essere utilizzata per dar luogo a effetti speciali.

## 3.2 Famiglie di Filtri Causali

Abbiamo visto che un filtro ideale non è causale e quindi può essere soltanto approssimato con filtri realizzabili fisicamente. A questo riguardo abbiamo introdotto parametri che denotano la bontà nell'approssimarne il guadagno (dimensione della banda di transizione, attenuazione, oscillazioni) o la fase (linearità).

La progettazione di un filtro è fortemente dipendente dall'applicazione; in certi casi (per esempio nei sistemi audio) è richiesta un'ottima risposta in fase. In altre applicazioni la linearità della fase è di scarso rilievo, mentre critica è l'accuratezza nell'approssimare il guadagno, e così via.

In aiuto al progettista, sono state introdotte e analizzate varie classi di filtri usualmente disponibili in sistemi di calcolo automatico per la progettazione, l'implementazione e la simulazione di filtri, quali ad esempio le primitive in ambiente MATLAB. Le principali famiglie sono quella dei filtri di *Butterworth*, di *Chebyshev*, di *Cauer* (o *ellittici*) e di *Bessel*. In Tabella 3.1 mostrata una grossolana valutazione comparativa della bontà di questi filtri (a parità di ordine); analizzeremo poi più in dettaglio le classi di filtri di Butterworth e Chebyshev.

Tabella 3.1 Caratteristiche qualitative di famiglie di filtri.

Filtro	Accuratezza guadagno	Linearità fase
Butterworth	media	media
Chebyshev	buona	cattiva
Ellittico	ottima	pessima
Bessel	cattiva	buona

### 3.2.1 Filtri di Butterworth

I filtri di Butterworth costituiscono una famiglia di filtri che soddisfa bene i requisiti sul guadagno in banda passante e meno bene in banda di transizione. Sebbene non esibiscano una fase lineare in banda passante, l'approssimazione non è troppo cattiva e sono tra i più semplici filtri elettronici da realizzare. Un filtro di Butterworth è caratterizzato da 2 parametri: l'ordine  $N$  e frequenza di taglio  $\omega_c$ .

La forma generale del modulo della funzione di trasferimento di un filtro di Butterworth di ordine  $N$  e frequenza di taglio  $\omega_c$  è:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|B_N(i\frac{\omega}{\omega_c})|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

dove  $B_N(s)$  è un opportuno polinomio detto  $N$ -esimo polinomio di Butterworth, mentre la scalatura  $\omega/\omega_c$  rispetto a  $\omega$  denota la frequenza normalizzata alla frequenza di taglio.

Si può dimostrare che, se  $N$  è pari, il polinomio  $B_N(s)$  è dato dal prodotto di  $N/2$  polinomi di secondo grado del tipo  $s^2 + bs + 1$  con  $b > 0$ , mentre se  $N$  è dispari allora è presente anche il fattore  $s + 1$ . La Tabella 3.2 mostra la fattorizzazione dei primi otto polinomi di Butterworth. Una proprietà interessante è che tutti i polinomi hanno le radici che giacciono sul cerchio di raggio unitario.

**Tabella 3.2** I primi otto polinomi di Butterworth fattorizzati.

---

$B_1(s) = s + 1$
$B_2(s) = s^2 + 1.414s + 1$
$B_3(s) = (s + 1)(s^2 + s + 1)$
$B_4(s) = (s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
$B_5(s) = (s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
$B_6(s) = (s^2 + 0.518s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$
$B_7(s) = (s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)$
$B_8(s) = (s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)$

---

La risposta in frequenza di alcuni filtri di Butterworth è riportata in Figura 3.3. Riguardo alla figura si possono fare le seguenti osservazioni:

- la frequenza di taglio a 3 dB  $\omega_c$ , è indipendentemente dall'ordine  $N$  del filtro;
- l'attenuazione nella banda proibita dipende da  $N$  in modo critico: risulta infatti un'attenuazione di  $20N$  dB per decade;
- non sono presenti oscillazioni né in banda passante né in banda proibita: il filtro di Butterworth è quello che presenta la maggior "piattezza" in banda passante.

In una tipica situazione di progetto, il parametro  $\omega_c$  è fissato essendo la frequenza di taglio desiderata, mentre l'ordine  $N$  viene scelto in modo tale da soddisfare la richiesta di attenuazione in banda proibita.

#### **Esempio 3.2.1.**

Determinare l'ordine di un filtro di Butterworth con frequenza di taglio di 100 Hz e frequenza di stop, con attenuazione a 40 dB, di 150 Hz.

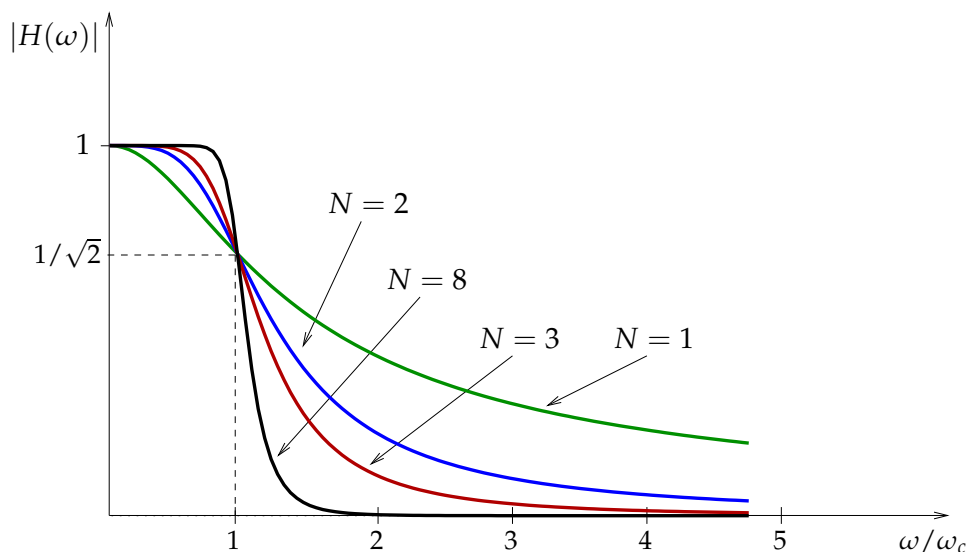


Figura 3.3 Risposta in frequenza di filtri di Butterworth.

Il guadagno di un filtro di Butterworth di ordine  $N$ , con frequenza di taglio pari a 100 Hz, è:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^{2N}}.$$

La frequenza di stop è per ipotesi la frequenza  $\omega_s$  che produce un'attenuazione di 40 dB, cioè:

$$20 \log_{10} |H(\omega_s)| = -40.$$

Si ottiene pertanto l'equazione:

$$20 \log_{10} \left( 1 + \left(\frac{150}{100}\right)^{2N} \right) = 40,$$

dalla quale si ricava che  $N \geq 5.68$ . Il filtro di ordine 6 soddisfa la specifica.

### 3.2.2 Filtri di Chebyshev

Nei filtri di Butterworth la funzione guadagno è monotona decrescente sia in banda passante che in quella proibita: un filtro di Butterworth quindi approssima bene un filtro ideale all'inizio della banda passante, ma l'approssima male alla fine della banda passante e in principio di quella proibita.

Un approccio più efficiente è quello di "distribuire" l'accuratezza dell'approssimazione uniformemente lungo tutta la banda passante o quella proibita: questo può essere ottenuto scegliendo un'approssimazione che ha oscillazioni della stessa ampiezza su tutta la banda passante o quella proibita.

Questa è l'idea base su cui è progettata la classe dei filtri di Chebyshev: il guadagno di un filtro di Chebyshev ha infatti oscillazioni di uguale ampiezza in banda passante ed è monotono decrescente in banda proibita, o viceversa. A parità di ordine, un filtro di



Chebyshev ha banda di transizione più stretta e miglior attenuazione di quello di Butterworth; tuttavia i filtri di Chebyshev sono generalmente più complessi da realizzare di quelli di Butterworth e hanno una peggiore risposta in fase.

La forma generale del modulo della funzione di trasferimento di un filtro di Chebyshev di ordine  $N$  e frequenza di taglio  $\omega_c$  è:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\frac{\omega}{\omega_c})}},$$

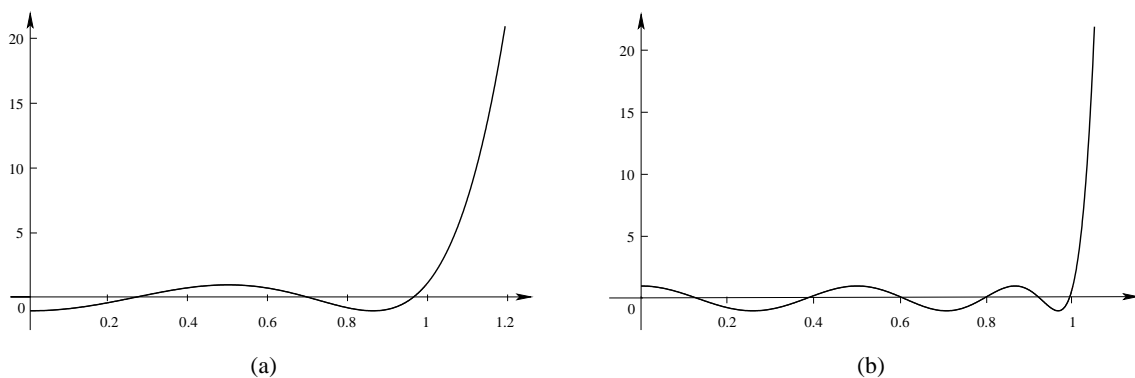
dove  $\varepsilon$  è una costante minore di 1 e  $C_N(v)$  è un opportuno polinomio chiamato polinomio di Chebyshev di ordine  $N$ . L'ennesimo polinomio di Chebyshev è definito come:

$$C_N(v) = \begin{cases} \cos(n \cdot \cos^{-1}(v)), & \text{se } 0 \leq v \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \cosh^{-1}(v)), & \text{se } v > 1 \end{cases},$$

e può essere ottenuto dalla seguente equazione di ricorrenza:

$$C_N(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } N = 0 \\ v, & \text{se } N = 1 \\ 2vC_{N-1}(v) - C_{N-2}(v), & \text{se } N > 1 \end{cases}.$$

I grafici dei polinomi  $C_6(v)$  e  $C_{12}(v)$  sono mostrati in figura 3.4.



**Figura 3.4** (a) Grafico del polinomio di Chebyshev  $C_6(v)$  e (b) del polinomio  $C_{12}(v)$ .

A giustificazione dell'equazione precedente possiamo definire innanzitutto la variabile  $\phi = \cos^{-1}(v)$ , così da poter scrivere  $C_N(v) = \cos(n\phi)$ . Sfruttando ora l'identità trigonometrica  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$ , si determina

$$\cos((n+1)\phi) + \cos((n-1)\phi) = 2\cos(n\phi)\cos(\phi).$$

Dalla posizione  $\phi = \cos^{-1}(v)$  si ricava dunque:

$$C_{N+1}(v) = 2vC_N(v) - C_{N-1}(v)$$

con cui generare i polinomi di qualunque ordine, come quelli riportati in Tabella 3.3.

In Figura 3.5 viene mostrata la risposta in frequenza di alcuni filtri di Chebyshev.

Tabella 3.3 I primi sei polinomi di Chebyshev.

$C_0 = 1$
$C_1 = v$
$C_2 = 2v^2 - 1$
$C_3 = 4v^3 - 3v$
$C_4 = 8v^4 - 8v^2 + 1$
$C_5 = 16v^5 - 20v^3 + 5v$
$C_6 = 32v^6 - 48v^4 + 18v^2 - 1$

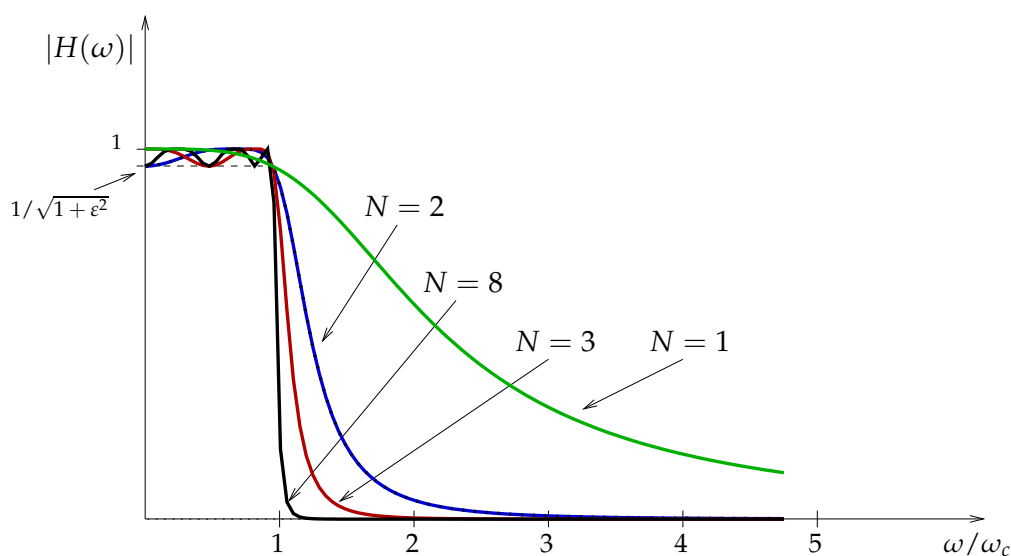


Figura 3.5 Risposta in frequenza di filtri di Chebyshev.

Si può osservare che il guadagno decresce molto rapidamente attorno alla frequenza di taglio anche per piccoli valori di  $N$  (per esempio  $N = 8$ ). Tuttavia questi filtri hanno lo svantaggio, rispetto a quelli di Butterworth, di presentare oscillazioni in banda passante dipendenti da  $\varepsilon$ ; le oscillazioni hanno tutte la stessa ampiezza e sono sempre contenute nell'intervallo  $[1/\sqrt{1+\varepsilon^2}, 1]$ , indipendentemente dall'ordine del polinomio.

Riassumendo, un filtro di Chebyshev è specificato dai tre parametri:  $\varepsilon$ ,  $\omega_c$  e  $N$ ; in una tipica situazione di progetto il parametro  $\varepsilon$  determina l'ampiezza dell'oscillazione ammessa in banda passante, la frequenza  $\omega_c$  specifica la frequenza di taglio desiderata e l'ordine  $N$  viene scelto in modo da soddisfare la richiesta di attenuazione in banda proibita.

### Esempio 3.2.2.

Si determini l'ordine di un filtro di Chebyshev con un'ondulazione di 1 dB e in grado di fornire un'attenuazione di 40 dB in corrispondenza di  $\omega/\omega_c = 2$ . Si faccia riferimento alla banda passante del filtro a 3 dB.

Il parametro  $\varepsilon$  è legato all'ondulazione espressa in decibel consentita in banda passante  $\gamma$  come

$$\varepsilon^2 = 10^{\gamma/10} - 1.$$

Se  $\gamma = 1$  dB si ricava il valore massimo di oscillazione pari a  $\varepsilon = 0.5088$ .

Il guadagno in frequenza normalizzata invece risulta:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\nu)}$$

Un'attenuazione di 40 dB si ha quando  $|H(\omega)|^2 = 0.01$ , che implica risolvere

$$(0.01)^2 = \frac{1}{1 + (0.5088)^2 C_N^2(2)}$$

Utilizzando la definizione di  $n$ -esimo polinomio di Chebyshev per  $\nu > 1$ , la soluzione dell'equazione precedente comporta la scelta del polinomio che in  $\nu = 2$  assume valore 196.5, che equivale a risolvere:

$$C_N(2) = \cosh(n \cdot \cosh^{-1}(2)) = 196.5.$$

Risolvendo rispetto a  $n$  otteniamo che l'intero  $n = 5$  soddisfa i requisiti.

### 3.3 Realizzazione di Filtri Analogici

Dato un filtro con risposta in frequenza  $H(\omega)$ , la sua realizzazione consiste nel progettare un circuito elettrico che, visto come sistema, ha  $H(\omega)$  come funzione di trasferimento. Questo circuito, dopo un accurato esame di sue eventuali imperfezioni come capacità parassite o altro, potrà essere implementato ottenendo la realizzazione fisica del filtro.

Le realizzazioni di filtri analogici possono essere classificate sulla base delle componenti costituenti; elenchiamo qui brevemente le principali classi con alcune caratteristiche.

**Filtri RLC passivi.** Essi consistono di componenti passive come induttanze, condensatori e resistenze. Per il loro funzionamento non richiedono potenza aggiuntiva, ma spesso esibiscono perdite significative in banda passante; la presenza di induttanze, inoltre, pone seri problemi alla loro miniaturizzazione. Lavorano bene fino a 500 Hz. Filtri RLC passivi saranno analizzati più in dettaglio in Sezione 3.3.1.

**Filtri RC attivi.** Questi filtri non contengono induttanze, ma resistenze, condensatori e amplificatori operazionali. Si prestano bene alla miniaturizzazione, ma richiedono potenza aggiuntiva. Lavorano bene da 1 Hz fino a 500 Hz. In Sezione 3.3.2 si analizza la realizzazione di filtri di Butterworth con componenti attive.

**Filtri a microonde.** Essi consistono di componenti passive come le linee di trasmissione, linee di trasmissione accoppiate e cavità risonanti. Non richiedono potenza aggiuntiva e sono utilizzate per filtri che lavorano sopra i 300 MHz.

**Filtri a cristallo.** Sono costituiti da risuonatori piezoelettrici ed lavorano dai 10 KHz ai 200 MHz. Con risuonatori di quarzo si possono realizzare filtri passabanda con ampiezza di banda veramente ristretta.

**Filtri elettromeccanici.** Sono costituiti da risuonatori meccanici: per prima cosa il segnale elettrico viene trasformato in vibrazioni meccaniche, viene poi applicato il filtro e infine il segnale è riconvertito in segnale elettrico. Questi filtri lavorano fino a 200 MHz.

Nel resto della sezione, analizziamo più in dettaglio i filtri RLC passivi e i filtri RC attivi.

### 3.3.1 Circuiti ad Elementi Passivi

Un filtro analogico può essere realizzato mediante una rete di resistenze, induttanze e condensatori, detto anche circuito ad elementi passivi. Il sistema così ottenuto riceve in ingresso una tensione  $v(t)$  posta tra due punti della rete e dà in uscita una tensione  $u(t)$  misurata tra altri due punti della rete. Un esempio di circuito è mostrato in Figura 3.6

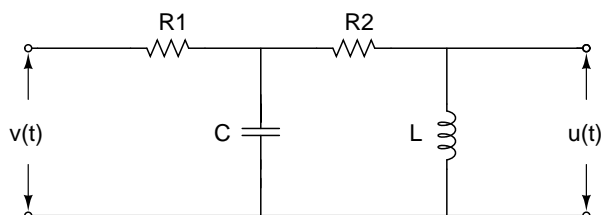


Figura 3.6 Circuito ad elementi passivi.

Gli elementi basilari di tali reti sono la resistenza, il condensatore e l'induttanza, rappresentati coi simboli mostrati in Figura 3.7.

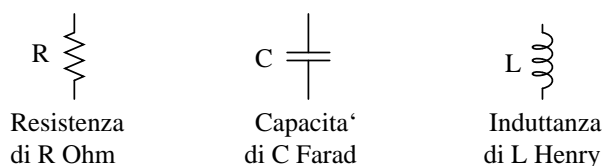


Figura 3.7 Resistenza, condensatore e induttanza.

Ponendo ai capi di tali elementi una tensione di  $v(t)$ , si crea una corrente di  $i(t)$  tale che:

- per la resistenza R vale:  $v(t) = Ri(t)$ ;
- per l'induttanza L vale:  $v(t) = L \frac{d}{dt}i(t)$ ;
- per il condensatore C vale:  $v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ .

Indicando ora con  $V(\omega)$  e  $I(\omega)$  rispettivamente la trasformata di Fourier di  $v(t)$  e  $i(t)$ , applicando le regole di derivazione e integrazione (vedi Tabella 2.2), le precedenti equazioni si riscrivono nella rappresentazione in frequenza come segue:

- per la resistenza R vale:  $V(\omega) = RI(\omega)$ ;
- per l'induttanza L vale:  $V(\omega) = i\omega LI(\omega)$ ;
- per il condensatore C vale:  $V(\omega) = \frac{1}{i\omega C} I(\omega)$ .

La relazione di ingresso-uscita di un circuito può essere ricavata risolvendo le equazioni ottenute dai due principi di Kirkoff:

- I. La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti.
- II. La somma delle tensioni lungo un circuito chiuso è 0.

Detta  $V(\omega)$  la trasformata di Fourier dell'ingresso  $v(t)$  e  $U(\omega)$  la trasformata di Fourier dell'uscita  $u(t)$ , applicando i principi di Kirkoff nella rappresentazione in frequenza si ottiene in generale che:

$$U(\omega) = H(\omega)V(\omega),$$

dove  $H(\omega)$  dipende dalla struttura del circuito e può essere interpretata come la funzione di trasferimento di un sistema lineare tempo-invariante; in tal modo è possibile realizzare dei filtri lineari con reti a elementi passivi.

### Esempio 3.3.1.

Analizziamo le caratteristiche del filtro ottenuto dal seguente circuito:

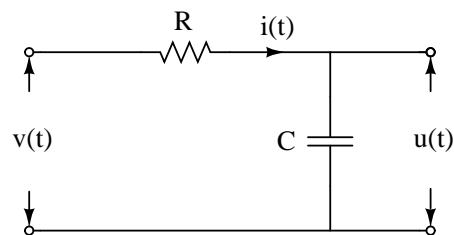


Figura 3.8 Circuito RC.

Applicando il principio II nella rappresentazione in frequenza, vale:

$$V(\omega) = RI(\omega) + \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Il comportamento del condensatore è dato da:

$$U(\omega) = \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze precedenti, si ottiene la seguente funzione di trasferimento  $H(\omega)$ :

$$H(\omega) = \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{1 + i\omega RC}.$$

Risulta quindi che guadagno e fase siano:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}, \quad \angle H(\omega) = -\arctan RC\omega.$$

I grafici del guadagno e della fase sono dati in Figura 2.10; la rete precedentemente descritta implementa quindi un filtro passabasso di Butterworth di ordine 1 con frequenza di taglio a 3 dB uguale a  $1/RC$ . La fase in banda passante è solo approssimativamente lineare.

**Esempio 3.3.2.**

Si consideri il filtro realizzato dal circuito RLC in Figura 3.9. Provare che il circuito realizza un filtro di Butterworth di ordine 2.

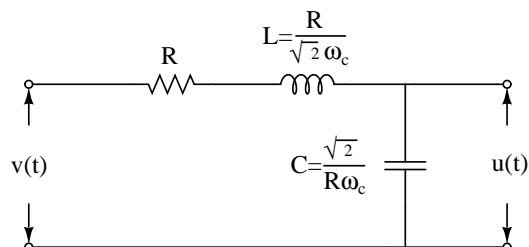


Figura 3.9 Filtro di Butterworth di ordine 2.

Applicando il principio II nella rappresentazione in frequenza, vale:

$$V(\omega) = RI(\omega) + i\omega LI(\omega) + \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Il comportamento del condensatore è dato da:

$$U(\omega) = \frac{1}{i\omega C}I(\omega).$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze precedenti, si ottiene la seguente funzione di trasferimento  $H(\omega)$ :

$$H(\omega) = \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = \frac{1}{1 + iRC\omega - LC\omega^2}.$$

Poiché  $L = \frac{R}{\sqrt{2}}$  e  $C = \frac{\sqrt{2}}{R\omega_c}$ , si ottiene infine:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Risulta quindi che guadagno e fase siano:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}, \quad \angle H(\omega) = -\arctan \frac{\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}.$$

### 3.3.2 Realizzazione di Filtri di Butterworth con Circuiti ad Elementi Attivi

In questa sezione presentiamo una tecnica per la realizzazione di filtri di Butterworth analogici mediante circuiti ad elementi attivi, contenenti resistenze, condensatori e amplificatori operazionali. Il fatto che non sia richiesta alcuna induttanza è, come detto, un vantaggio importante nella pratica poiché le induttanze sono voluminose, contengono resistenze e capacità parassite e dissipano considerevole potenza. Il metodo può essere facilmente esteso alla costruzione di altri tipi di filtri.

I passi principali possono essere riassunti come segue.

1. Si consideri la funzione di trasferimento del filtro. Nel caso del filtro di Butterworth di ordine  $N$  con frequenza di taglio  $\omega_c$ , risulta

$$H(\omega) = \frac{1}{B_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right)},$$

dove  $s = i\omega$  e  $B_N(z)$  è il polinomio di Butterworth di ordine  $N$ .

2. Si decompone  $B_N(z)$  come prodotto  $p_1(z) \cdot p_2(z) \cdots p_m(z)$ , dove  $p_i(z)$  è del tipo  $z + 1$  oppure  $z^2 + bz + 1$ , con  $b$  reale positivo. In Tabella 3.2 sono riportate le fattorizzazioni dei primi otto polinomi di Butterworth.
3. Si realizzano separatamente i sistemi  $S_i$  che hanno  $1/p_i(s/\omega_c)$  come funzione di trasferimento ( $1 \leq i \leq m$ ).
4. Si costruisce il sistema  $S$  ottenuto ponendo in cascata i sistemi  $S_i$ , in modo che l'uscita di  $S_i$  sia l'ingresso di  $S_{i+1}$  ( $1 \leq i < m$ ), come rappresentato Figura 3.10.

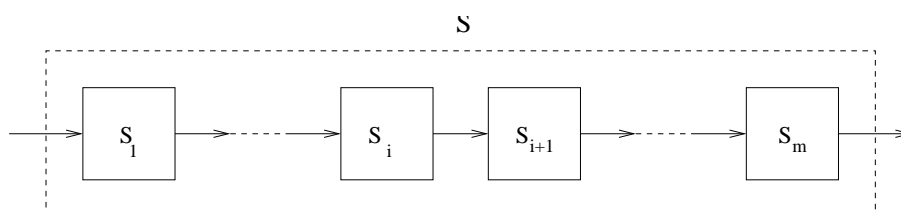


Figura 3.10 Cascata dei sistemi  $S_i$ , con  $1 \leq i \leq m$ .

La costruzione è corretta poiché il sistema complessivo  $S$  ha come funzione di trasferimento  $H\left(\frac{s}{\omega_c}\right)$  il prodotto delle funzioni di trasferimento dei sistemi  $S_i$ , cioè:

$$H\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{p_1\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} \cdots \frac{1}{p_m\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} = \frac{1}{p_1\left(\frac{s}{\omega_c}\right) \cdots p_m\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} = \frac{1}{B_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right)}.$$

Il passo 4. mostra come un arbitrario filtro di Butterworth possa essere ottenuto da una composizione in cascata di sistemi che hanno funzioni di trasferimento del tipo:

$$H_1\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1} \quad \text{oppure} \quad H_2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + b\frac{s}{\omega_c} + 1}.$$

Illustriamo ora come costruire un circuito a componenti attive che realizza il filtro con funzione di trasferimento

$$H_2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + b\frac{s}{\omega_c} + 1}. \quad (3.1)$$

A questo scopo si consideri il circuito (a) in Figura 3.11. Esso è composto da elementi passivi (condensatori e resistenze) e da un amplificatore operazionale non-invertente che permette di amplificare il segnale  $V_2$  di un fattore  $A$ , controllato dalle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ :

$$U = AV_2 \quad \text{con} \quad A = \frac{R_1 + R_2}{R_1} > 1.$$

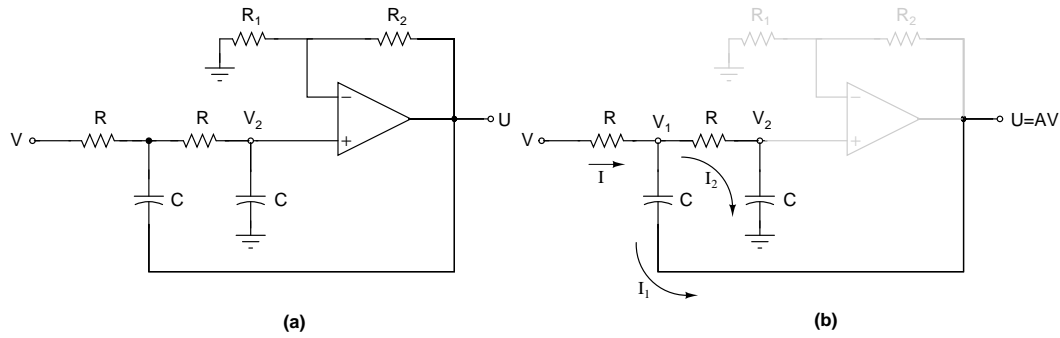


Figura 3.11 (a) Filtro di Butterworth di ordine 2. (b) Sottocircuito.

Analizziamo ora il sottocircuito (b) in Figura 3.11; con  $V$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $U$  denotiamo le trasformate di Fourier delle tensioni nei punti indicati e con  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  le trasformate di Fourier delle correnti nei cammini indicati. Poiché  $I = I_1 + I_2$  risulta:

$$V = R(I_1 + I_2) + V_1. \quad (3.2)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} V_1 &= RI_2 + V_2, & V_1 &= \frac{1}{sC}I_1 + U, \\ V_2 &= \frac{1}{A}U, & V_2 &= \frac{1}{sC}I_2. \end{aligned}$$

Queste ultime quattro equazioni permettono di esprimere  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  in termini di  $U$ ; sostituendo nella (3.2) si ottiene infine:

$$V = [(RCs)^2 + (3 - A)RCs + 1]U.$$

Il circuito realizza dunque un filtro con funzione di trasferimento:

$$\frac{1}{(RCs)^2 + (3 - A)RCs + 1}.$$

Per ottenere il filtro con la funzione di trasferimento desiderata (3.1) basta scegliere  $R$ ,  $C$  ed  $A$  tali che:

$$RC = \frac{1}{\omega_c}, \quad (3.3)$$

$$A = 3 - b. \quad (3.4)$$

Il metodo sopra esposto del tutto generale. In particolare:

- Esso può essere applicato per la realizzazione di altri filtri, ad esempio quelli di Chebyshev, semplicemente considerando le fattorizzazioni dei polinomi di Chebyshev in fattori di primo e secondo grado a coefficienti reali.
- Esso può essere facilmente adattato alla costruzione di filtri passaalto, osservando che la funzione di trasferimento di un filtro passaalto con frequenza di taglio  $\omega_c$  pu essere ottenuta dalla funzione di trasferimento del filtro passabasso con la stessa frequenza di taglio, operando la sostituzione  $\frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow \frac{\omega_c}{\omega}$ . In particolare, un circuito passaalto con funzione di trasferimento  $H_2$  può essere ottenuto scambiando le resistenze  $R$  con i condensatori  $C$  nel circuito in Figura 3.11.



- Per quanto riguarda infine la realizzazione di filtri passabanda, un filtro passabanda con frequenza di taglio  $\omega_1 < \omega_2$  può essere ottenuto ponendo in cascata un filtro passabasso con frequenza di taglio  $\omega_2$  e un filtro passaalto con frequenza di taglio  $\omega_1$ .

**Esempio 3.3.3.**

Realizzazione di un filtro di Butterworth passabasso di ordine 4 con frequenza di taglio  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .

Ricordiamo (vedi Tabella 3.2) che il polinomio di Butterworth di ordine 4 è:

$$B_4(s) = (s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1).$$

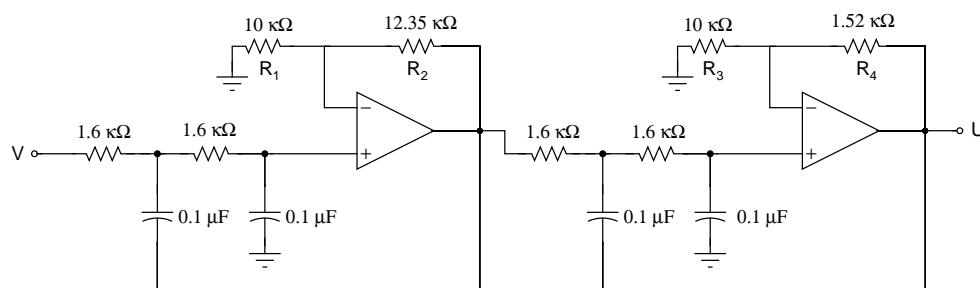
Il filtro sarà ottenuto ponendo in cascata i due circuiti aventi funzioni di trasferimento:

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 0.765\frac{s}{\omega_c} + 1}' \quad \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 1.848\frac{s}{\omega_c} + 1}' \quad \text{con } \omega_c = 2\pi f_0.$$

Tali circuiti sono del tipo mostrato in Figura 3.11. Per la (3.4), gli amplificatori operazionali dei due circuiti devono avere guadagni  $A' = 3 - 0.765 = 2.235$ ,  $A'' = 3 - 1.848 = 1.152$ .

Poiché  $A' = \frac{R'_1 + R'_2}{R'_1}$  e  $A'' = \frac{R''_1 + R''_2}{R''_1}$ , fissati arbitrariamente  $R'_1 = R''_1 = 10 \text{ k}\Omega$ , si ricava  $R'_2 = 12.35 \text{ k}\Omega$  e  $R''_2 = 1.52 \text{ k}\Omega$ . Per la (3.3), i valori di  $R$  e  $C$  nei due circuiti devono verificare  $RC = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3}$  sec. Fissato arbitrariamente  $C = 0.1 \mu\text{F}$ , si ottiene  $R = 1.6 \text{ k}\Omega$ .

Il circuito finale, ottenuto ponendo in cascata i due circuiti precedenti, è mostrato in Figura 3.12.



**Figura 3.12** Filtro di Butterworth passabasso di ordine 4.