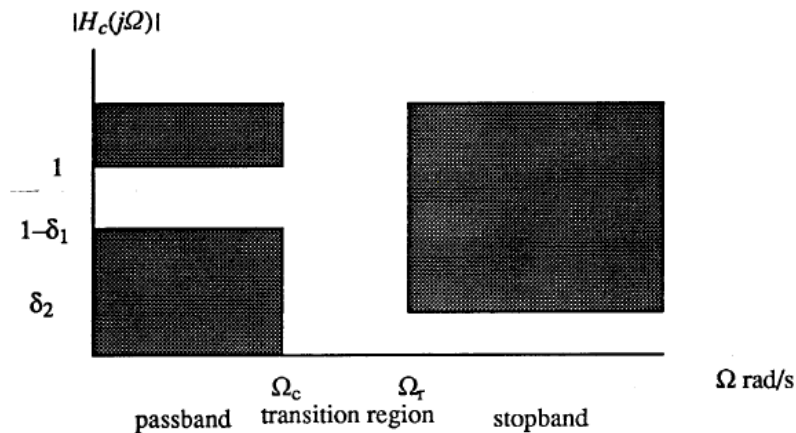


# FILTRI ANALOGICI

## Tipologie

Filtri passa basso  
Filtri passa banda  
Filtri passa alto  
Filtri elimina banda  
Filtri passa tutto

## Specifiche



frequenza di taglio =  $f_c$ , frequenza alla quale il guadagno si riduce di un fattore pari  $1/\sqrt{2}$  rispetto al guadagno in centro banda (-3dB)

**banda passante**, per non avere distorsioni lineari di fase e di ampiezza:

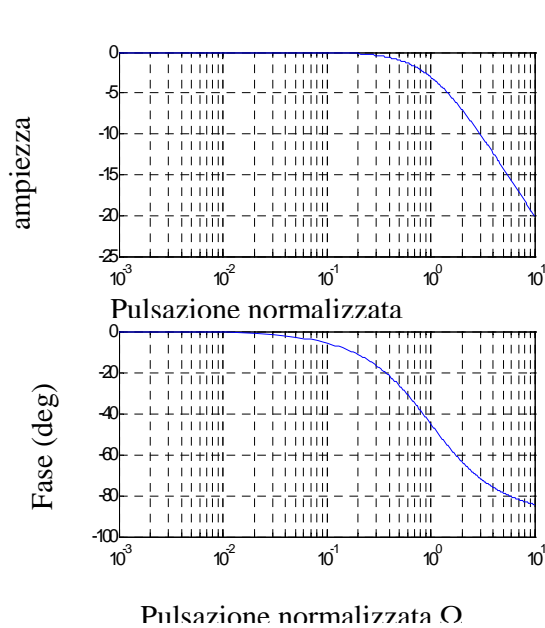
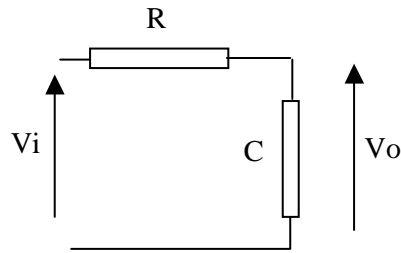
- il guadagno deve essere maggiore  $1-\delta_1$  e minore di  $1$  (piattezza del guadagno in banda)
- la fase deve essere il più possibile lineare (il ritardo di gruppo =  $\frac{d\phi}{d\omega} = t_g$  il più possibile costante)

**banda di transizione** deve essere il più piccola possibile (idealmente nulla, pendenza infinita della risposta)

**stop band:**

il guadagno deve essere minore di  $\delta_2$

### filtro passivo del 1° ordine



$$A(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

$$A(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$|A(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}; \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow |A(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{s}{\omega_c}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$A(S) = \frac{1}{1 + S}; \quad A(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega}$$

$$\text{per } \Omega \gg 1 \quad |A(j\Omega)| = \frac{1}{\Omega} \Rightarrow \text{pendenza } -20 \text{ dB/decade}$$

Se è necessaria una pendenza maggiore della risposta fuori banda del filtro (una banda di transizione ridotta) è possibile utilizzare n stadi in cascata, filtro di ORDINE n, attenzione  $f_c$  è sempre definita come la frequenza a -3dB del filtro complessivo, non come la frequenza di taglio del singolo stadio

n filtri non interagenti

$$A(S) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c} R_1 C_1 \omega_c\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_c} R_2 C_2 \omega_c\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_c} R_3 C_3 \omega_c\right) \dots \left(1 + \frac{s}{\omega_c} R_n C_n \omega_c\right)} =$$

$$= \frac{1}{(1 + \alpha_1 S)(1 + \alpha_2 S)(1 + \alpha_3 S) \dots (1 + \alpha_n S)}$$

$$\alpha_i = R_i C_i \omega_c$$

reali positivi

$$\Omega \gg 1 \Rightarrow |A(j\Omega)| = \frac{1}{\Omega^n}$$

pendenza  $-n \times 20 \text{ dB/decade}$

se si utilizzano n filtri non interagenti identici:

$$\forall i \dots \alpha_i = \alpha$$

$$|A(j\Omega)|^2 = \frac{1}{(1 + (\alpha\Omega)^2)^n};$$

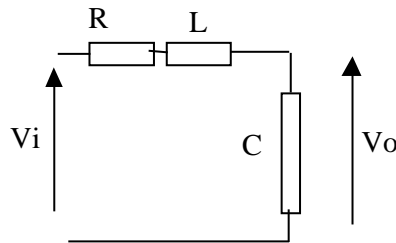
$$|A(j1)|^2 = \frac{1}{(1 + \alpha^2)^n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}$$

$$f_{ci} = \frac{1}{\alpha} f_c$$

ogni stadio (filtro del primo ordine) ha una frequenza di taglio superiore alla frequenza di taglio del filtro complessivo  $f_{ci} = 1/\alpha f_c$ ;

I filtri che si ottengono con celle del primo ordine sono filtri a poli reali. Per realizzare filtri con poli complessi occorre utilizzare celle almeno del secondo ordine

### FILTRI PASSIVI DEL 2° ordine



$$A(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + RCj\omega - LC\omega^2}$$

$$A(s) = \frac{1}{1 + sCR + s^2LC}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_o} = RC;$$

$$A(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_o} s + \frac{s^2}{\omega_o^2}}$$

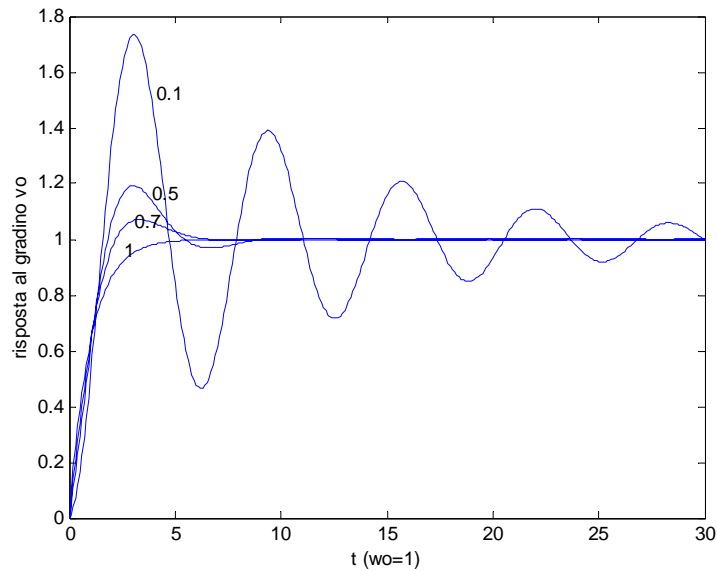
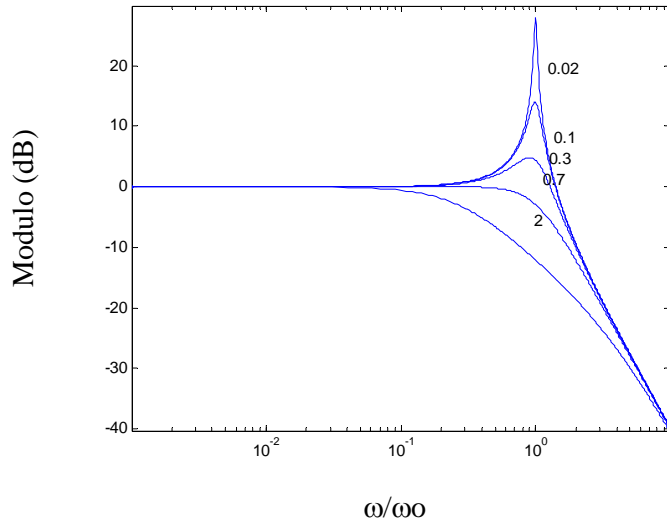
$\zeta$  rappresenta il coefficiente di smorzamento e determina la dinamica del sistema infatti:

$$p_{1,2} = \zeta\omega_o \pm \omega_o\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

i poli sono complessi e coniugati se  $\zeta < 1$  (oscillazione propria, sovraelongazione) inoltre

$$|A(j\omega)|^2 = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

il modulo della funzione di trasferimento presenta un massimo per  $\omega \neq 0$  se  $\zeta < 0.7$



A volte invece dello smorzamento si utilizza il fattore di qualità Q

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{2\zeta}$$

(si hanno poli reali se  $Q < 0.5$ , non si ha picco della risposta in frequenza se  $Q < 1/\sqrt{2}$ )

le induttanze si realizzano facilmente per filtri che tagliano in alta frequenza, in bassa frequenza si realizzano celle con poli complessi coniugati del secondo ordine a componenti attivi.

Realizzando cascate di filtri del 1° e del secondo ordine si possono realizzare filtri di ordine superiore con poli reali e/o complessi coniugati.

$$A(S) = \frac{A_0}{\prod_i (1 + a_i S + b_i S^2)} \quad (1)$$

$$|A(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K_2 \Omega^2 + K_4 \Omega^4 + \dots + K_{2n} \Omega^{2n}}$$

## Tipi di filtri passa basso

- **Butterworth** - massimamente piatto in banda (risposta all'impulso con sovraelongazione che aumenta per filtri che hanno ordine elevato)

$$\omega \ll \omega_c \Rightarrow \Omega \ll 1$$

$$K_2 = K_4 = K_6 = \dots = K_{2n-2} = 0$$

$$K_{2n} = 1$$

$$|A(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K_{2n}\Omega^{2n}} = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

questa condizione garantisce che le variazioni del guadagno in banda siano minime.

Si trovano (tabulati) i coefficienti a e b (eq. 1) che garantiscono che il modulo del guadagno abbia questa forma.

NB per  $n > 1$  i poli sono complessi e coniugati: si devono usare cascate di celle del secondo ordine (+una cella del primo ordine, se l'ordine è dispari)

- **Chebyshev**- banda di transizione ridotta (ma ondulazioni=ripple in banda passante)

$$|A(j\Omega)|^2 = \frac{k^2 A_0^2}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(x)}$$

$$T_n(x) = \text{polinomio di Cheb.} = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)) & \text{se } 0 < x < 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(x)) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

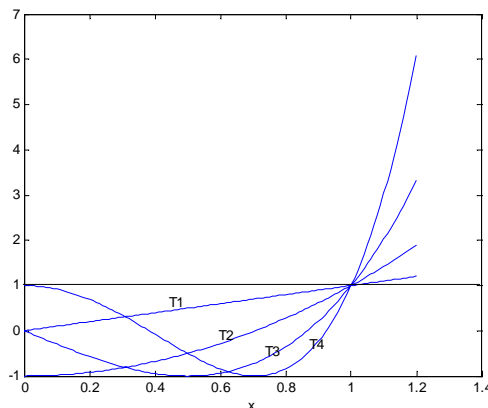
$$x = \alpha\Omega$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$\alpha$  è scelta in modo che per  $\Omega=1$  il guadagno sia ridotto di un fattore  $1/\sqrt{2}$  rispetto al valore che assume per  $\Omega=0$ .



I polinomi di Chebyshev oscillano tra  $-1$  e  $1$  per  $x$  tra  $0$  ed  $1$  poi crescono indefinitamente per  $x > 1$ , quindi l'ampiezza della risposta del filtro oscilla tra  $kA_0$  e  $kA_0/\sqrt{1+\varepsilon^2}$  in banda, mentre fuori banda si attenua.

- $A_0$  e  $k$  determinano il guadagno in banda passante
- $\varepsilon$  determina l'ampiezza del ripple (es 0.5dB, 2dB) e la pendenza nella banda di transizione (maggiore è l'ampiezza del ripple maggiore è la pendenza)

(esistono anche filtri Chebycheff del II tipo con ripple in stop band, filtri ellittici con ripple in entrambe le bande e transizioni più rapide)

Fissato l'ordine del filtro e i parametri si trovano (tabulati) i coefficienti a e b dell'eq.1

- **Bessel** - risposta al gradino ottima (ritardo di gruppo quasi costante in banda)

**Es. 2° ordine:**

$$A(S) = \frac{A_0}{1 + a_1 S + b_1 S^2}$$

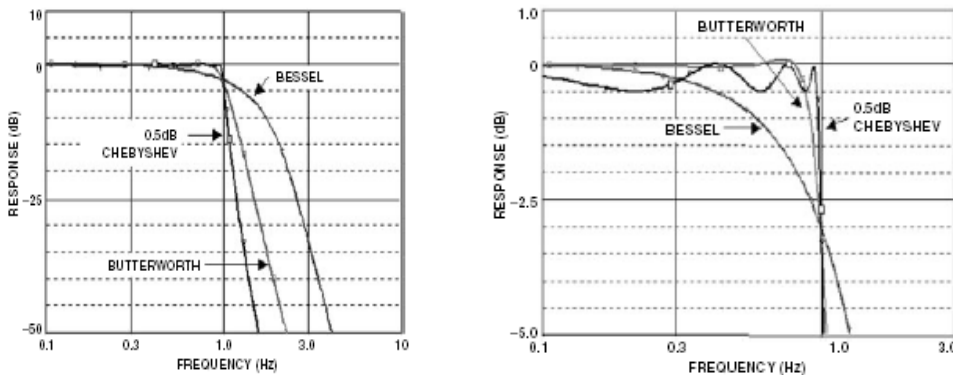
$$A(j\Omega) = \frac{A_0}{1 + a_1 j\Omega - b_1 \Omega^2}$$

$$\Phi = \angle A(j\Omega) = a \tan\left(\frac{a_1 \Omega}{1 - b_1 \Omega^2}\right)$$

$$t_g = \frac{d\Phi}{d\omega} = \omega_c \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

Come era stato fatto per i filtri di Butterworth si impone che in banda passante dove  $\Omega \ll 1$ , il parametro  $t_g$  sia il più possibile costante, da questa condizione e dalla condizione  $A(j1) = A_0/\sqrt{2}$ , si ricavano i coefficienti a e b dell'eq.1 (si trovano tabulati).

### CONFRONTO TRA I TIPI DI FILTRI PASSA BASSO



Confronto tra filtri dello stesso ordine n=8

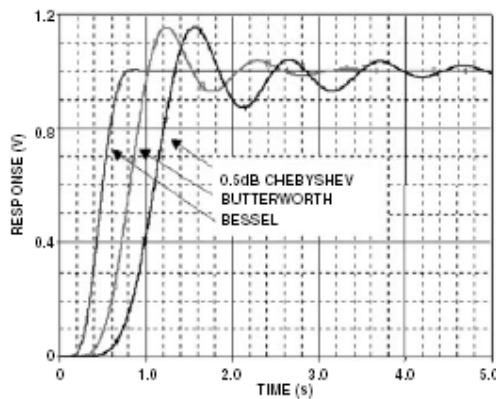


Figure 15. Step Response Comparison

CONFRONTO tra le caratteristiche dei filtri ( $t_d$  = (TEMPO DI RITARDO) ritardo fino 50% valore finale,  $t_r$  = (TEMPO DI SALITA) tempo tra 10% e 90% del valore finale, overshoot = max uscita – valore finale,  $t_c = 1/f_c$ )  
 NB  $t_r$  non dipende molto dal tipo di filtro né dall'ordine e risulta sempre circa (come nel primo ordine):

$$t_r = \frac{1}{3f_c}$$

$t_d$  invece cresce in maniera significativa, ed in genere anche l'overshoot.

Ordine:	2	4	6	8	10
Critical damping					
tr/tc	0.344	0.342	0.341	0.341	0.340
Td/tc	0.172	0.254	0.316	0.367	0.412
Overshoot (%)	0	0	0	0	0
Bessel					
tr/tc	0.344	0.352	0.350	0.347	0.345
Td/tc	0.195	0.329	0.428	0.505	0.574
Overshoot (%)	0.43	0.84	0.64	0.34	0.06
Butterworth					
tr/tc	0.342	0.387	0.427	0.460	0.485
Td/tc	0.228	0.449	0.663	0.874	1.084
Overshoot (%)	4.3	10.8	14	16	18
Chebyshev (2dB ripple)					
tr/tc	0.326	0.414	0.491	0.529	0.570
Td/tc	0.267	0.587	0.912	1.231	1.557
Overshoot (%)	21	29	32	33	35

## RIASSUNTO

$$A(S) = \frac{A_0}{\prod_i (1 + a_i S + b_i S^2)}$$

$$|A(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K_2 \Omega^2 + K_4 \Omega^4 + \dots + K_{2n} \Omega^{2n}}$$

data  $f_c$  del filtro complessivo, dato l'ordine  $n$ , scelta la tipologia del filtro:

⇒ si trovano i coefficienti  $a$  e  $b$

- controllare la  $f_{ci}$  del singolo stadio
- controllare  $Q_i = \frac{\sqrt{b_i}}{a_i} = \frac{1}{2\zeta_i}$  del singolo stadio

ATTENZIONE: i singoli stadi possono diventare difficili da realizzare (instabilità, saturazioni)

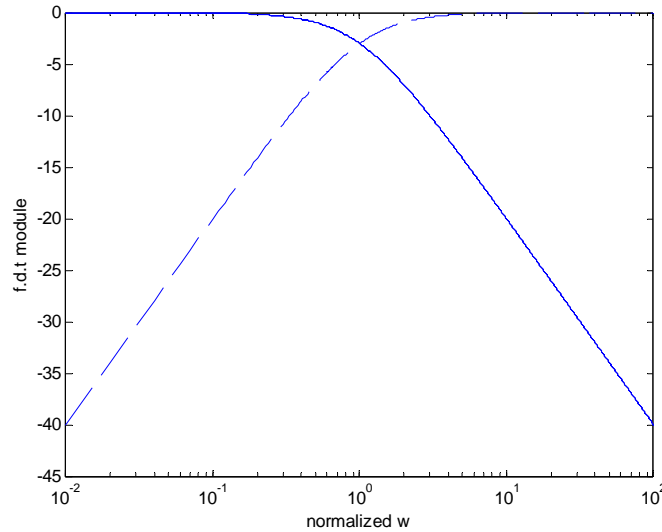
## PROGETTO DI FILTRI PASSA ALTO E PASSA BANDA

In genere si parte dalle strutture dei passa basso viste.

**Per i passa alto:**

si vorrebbe invertire l'asse delle frequenze (logaritmico) cioè passare da  $\log(\Omega)$  a  $-\log(\Omega)$

in questo modo si otterrebbe una risposta in frequenza speculare proprio rispetto ad  $\Omega=1$ , cioè a  $f=f_c$ ;



questo si ottiene sostituendo nel guadagno di un filtro passa basso espresso come nell'eq.1 la variabile  $S$  con  $1/S$  ovvero  $\Omega$  con  $1/\Omega$

$$S \rightarrow \left(\frac{1}{S}\right)$$

$$A(S) = \frac{A_o}{\prod_i \left(1 + \frac{a_i}{S} + \frac{b_i}{S^2}\right)}$$

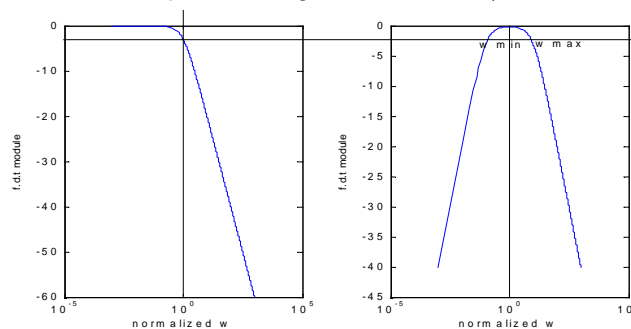
la frequenza del filtro passa alto così ottenuto sarà uguale alla frequenza di taglio del filtro p.b originale il guadagno in alta frequenza ( $\Omega \rightarrow \infty$ ) coincide con il guadagno in continua ( $A_o$ ) del filtro p.b. originale.

#### Per i passa banda:

si esegue la seguente trasformazione:

$$S \rightarrow \frac{1}{\Delta\Omega} \left(S + \frac{1}{S}\right)$$

con questa trasformazione si ottiene che la risposta del passa basso per  $0 < \Omega < 1$  viene riportata nella banda che va da  $\Omega=1$  alla frequenza di taglio superiore  $\Omega_{max}$  e viene riportata in modo speculare sulla banda che va da  $\Omega=1$  alla frequenza di taglio inferiore  $\Omega_{min}$ , inoltre  $\Omega_{min} = 1/\Omega_{max}$



- $\Delta\Omega$  è un parametro che può essere scelto arbitrariamente e determina la larghezza di banda del passa banda infatti  $\Delta\Omega = \Omega_{max} - \Omega_{min}$ .

Per un passa banda i parametri fondamentali sono:

- $f_r$  = frequenza di risonanza o centro banda, è il centro di simmetria della risposta in frequenza, e la frequenza che si utilizza per la normalizzazione della frequenza, pulsazione e variabile  $S$ . Cioè per un passa banda si deve intendere:



$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_r}; F = \frac{f}{f_r}; S = \frac{s}{\omega_r}$$

- o Ar= Guadagno in centro banda  $|A(j1)|$ .
- o Q= fattore di qualità, per un filtro passa banda del secondo ordine:

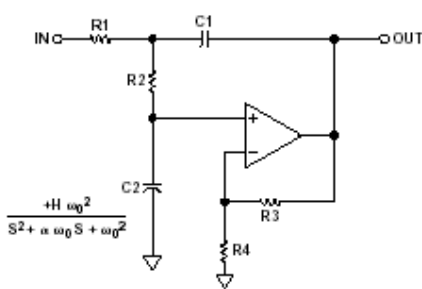
$$\text{Passa-basso} \dots A(S) = \frac{A_o}{1+S} \Rightarrow \text{Passa-banda} \dots A(S) = \frac{A_o}{1 + \frac{1}{\Delta\Omega} \left(S + \frac{1}{S}\right)} = \frac{A_o \Delta\Omega S}{1 + \Delta\Omega S + S^2};$$

$$\Omega = 1 \rightarrow f = f_r (\text{frequenza di risonanza})$$

$$Q(\text{fattore di qualità}) = \frac{fr}{B} = \frac{\omega_r}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} = \frac{1}{\Delta\Omega}$$

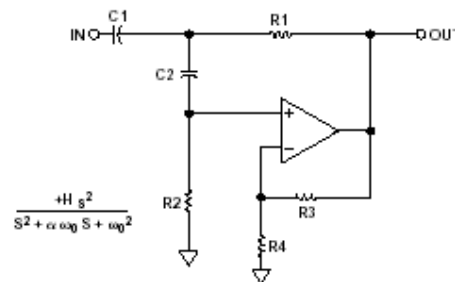
### Topologie delle celle del secondo ordine

Oltre alla cella LCR passiva si possono realizzare celle del secondo ordine utilizzando solo R C e operazionali



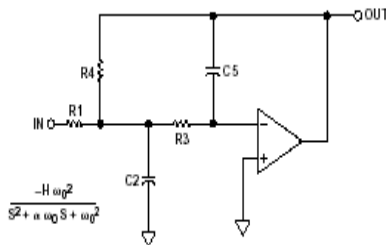
$$\frac{V_o}{V_{IN}} = \frac{H \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \left[ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_2} + \frac{(1-H)}{R_2 C_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

passa basso (sallen and key)



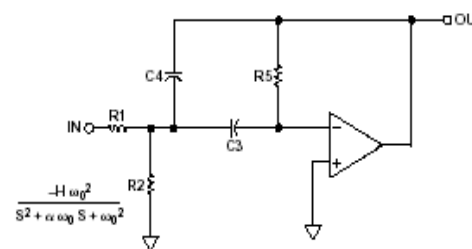
$$\frac{V_o}{V_{IN}} = \frac{H s^2}{s^2 + s \left[ \frac{C_2 + \frac{C_1}{R_2} + (1-H) \frac{C_2}{R_1}}{C_1 C_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

passa alto (sallen and key)



$$\frac{V_o}{V_{IN}} = \frac{-H \frac{1}{R_1 R_3 C_2 C_5}}{s^2 + s \left[ \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5} \right]}$$

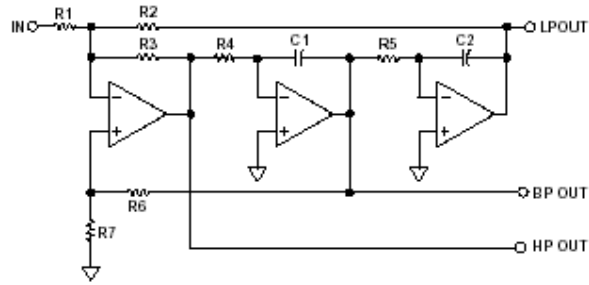
multiple feedback (passa basso)



$$\frac{V_o}{V_{IN}} = \frac{-s \frac{1}{R_1 C_4}}{s^2 + s \left[ \frac{(C_3 + C_4)}{C_3 C_4 R_5} + \frac{1}{R_5 C_3 C_4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]}$$

multiple feedback (passa alto)

esistono anche le versioni passa banda.



$$A_{LP}(s=0) = -\frac{R2}{R1}$$

$$A_{HP}(s=\infty) = -\frac{R3}{R1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R3}{R2 R4 R5 C1 C2}}$$

CHOOSE R1:

$$R2 = A_{LP} R1$$

$$R3 = A_{HP} R1$$

filtro biquad universale

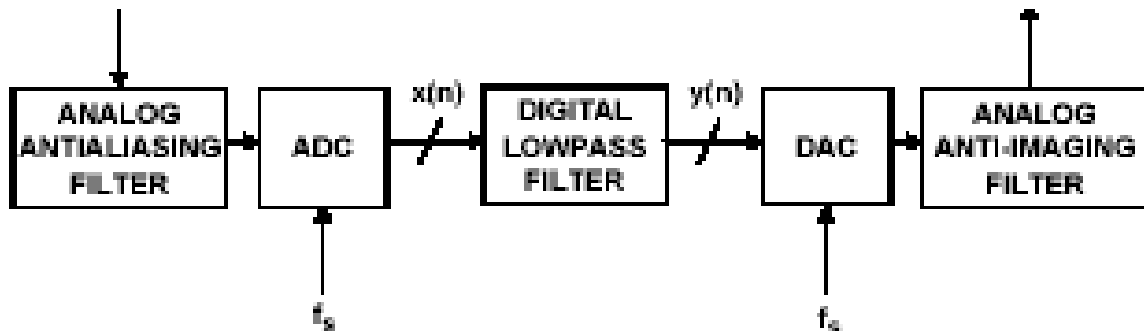
I filtri di ordine superiore si realizzano con cascate di filtri del secondo e primo ordine.

## Filtri analogici integrati

### Tecnologie

- 1) Filtri a condensatori commutati (Switched-capacitor –SC): le resistenze sono sostituite da capacità commutate quindi sono programmabili – queste architetture operano internamente a tempo discreto ma a valori analogici)
- 2) Filtri R-C (filtri attivi standard “standard” contenenti , R,C and OPamps con resistenze di retroazione implementate spesso con MOST)
- 3) Filtri gm-C (le resistenze vengono sostituiti da transistori utilizzati ad anello aperto)

## FILTRI DIGITALI



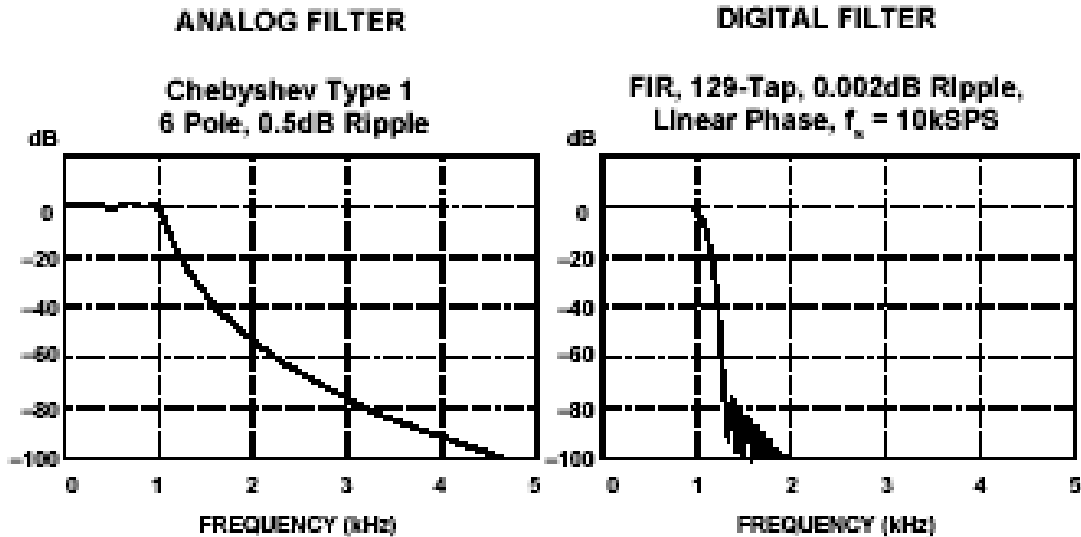
$$y(n) = \sum_{k=0}^N b(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^K a(k)y(n-k)$$

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^N b(k)z^{-k} + Y(z) \sum_{k=1}^K a(k)z^{-k}$$

$$Y(z) = X(z) \frac{\sum_{k=0}^N b(k)z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^K a(k)z^{-k}} = X(z)H(z)$$

per passare dal dominio  $z$  al dominio della frequenza  $s$  applicare la relazione  $z = e^{j\omega T_s} = e^{sT_s}$   
 ( $f_s = 1/T_s$  frequenza di campionamento)

Filtri digitali	Filtri analogici
Elevata accuratezza	Minore accuratezza – tolleranza dei componenti
Fase lineare (FIR)	Fase non lineare
Assenza di derive dovute alle variazioni dei valori dei componenti	Deriva dovuta alle variazioni del valore dei componenti
Possibile filtraggio flessibile o adattivo	Filtri adattivi difficili da realizzare
Facile da progettare e testare	Complessi da progettare e da simulare
Il calcolo deve essere effettuato in un periodo di campionamento per le applicazioni in real time – limiti di velocità	Indispensabili alle alte frequenze e per realizzare filtri anti-aliasing
Richiedono ADC DAC e DSP ad elevate prestazioni – costo	Hardware semplice e basso costo



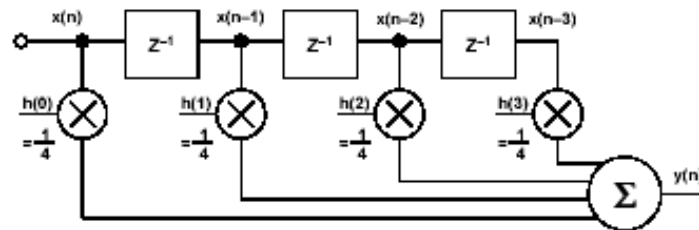
### SPECIFICHE PER LA REALIZZAZIONE DI FILTRI DIGITALE IN TEMPO REALE

- Banda del segnale =  $f_a$
- Frequenza di campionamento  $f_s > 2f_a$
- Tempo di computazione del filtro + tempo di assestamento campionatore + tempo di conversione < periodo di campionamento  $1/f_s = t_s$ 
  - Dipende dal numero di coefficienti del filtro
  - Dalla velocità del MAC (moltiplicatore e accumulatore DSP)
  - Efficienza dell'algoritmo

### Tipi di filtri digitali

- A media mobile
- Finite impulse response (FIR)
  - Fase lineare
  - Facili da progettare
  - Computazione pesante
- Infinite impulse response (IIR)
  - Basati su filtri classici analogici
  - Efficienti dal punto di vista computazionale
- Filtri adattativi

## FILTRI A MEDIA MOBILE (SONO UNA CLASSE DI FIR)



$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

tutti i pesi del filtro sono uguali

la computazione è efficiente:

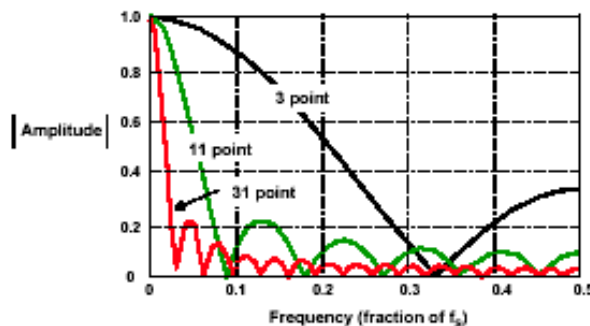
dato  $y(k)$ ,

quando arriva il campione  $k+1$ -esimo:  $x(k+1)$  occorre sottrarre  $x(k-N)/N$  da  $y(k)$  e sommare a  $y(k)$   $x(k+1)/N$  per ottenere  $x(k+1)$

i campioni della risposta impulsiva del filtro sono tutti uguali, la risposta impulsiva del filtro è un rect di durata  $Nt_s$

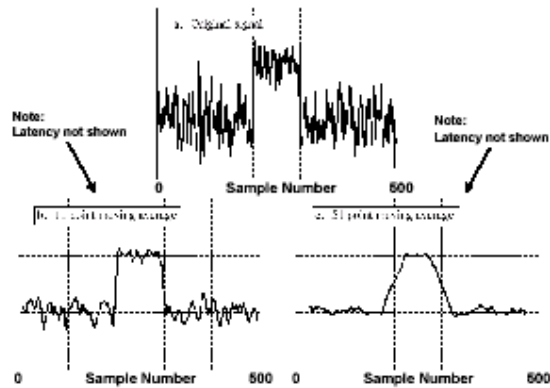
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nt_s) * \text{rect}\left(\frac{t}{Nt_s}\right)$$

### MOVING AVERAGE FILTER FREQUENCY RESPONSE

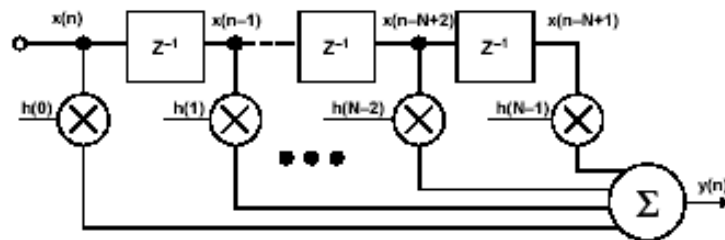


$$H(\omega) = k \frac{\sin(\omega N t_s)}{\omega N t_s} = k \frac{\sin(\omega N_s / f_s)}{\omega N / f_s}$$

### MOVING AVERAGE FILTER RESPONSE TO NOISE SUPERIMPOSED ON STEP INPUT



### FILTRI FIR (FINITE IMPULSE RESPONSE)



■  $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$

■ \* = Symbol for Convolution

■ Requires N multiply-accumulates for each output

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k) = h * x$$

i coefficienti a(k) sono uguali a 0.

**Nei filtri FIR i coefficienti b(k) del filtro rappresentano i campioni della risposta impulsiva h(k)**

**(se x è un impulso  $\delta(n)$ , mentre x si propaga nel filtro i campioni di y coincidono con la sequenza dei coefficienti del filtro)**

**La risposta in frequenza è determinata dalla trasformata della risposta impulsiva**

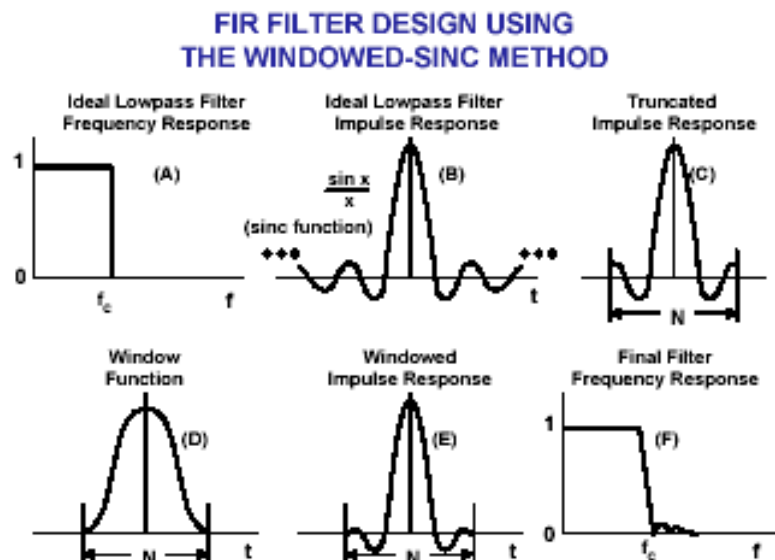
### Caratteristiche:

- La risposta impulsiva ha durata finita (N+1 campioni)
- La fase è lineare, il ritardo di gruppo ( $d\phi/d\omega$ ) è costante =  $Nt_s/2$  (se i campioni sono simmetrici  $b(N-k)=b(k)$  o  $b(N-k)=-b(k)$ )
- Non c'è un equivalente analogico
- Incondizionatamente stabile
- Possono essere adattativi
- Semplici da progettare e capire

### ALCUNI METODI DI PROGETTO

1. Windowed-sinc
2. Risposta in frequenza arbitraria e FFT inversa
3. Pars-McLellan

1. Windowed-sinc



2. Risposta in frequenza arbitraria e FFT inversa

- a) Si specifica la risposta in frequenza  $H(k)$ , campionata uniformemente fra 0 e  $f_s/2$  con un numero sufficiente di punti (in modulo e fase, la fase può essere 0)
- b) Si converte in forma rettangolare (parte reale e parte immaginaria)
- c) Si esegue una trasformazione di Fourier inversa (ifft) ottenendo la risposta impulsiva del filtro  $h(k)$
- d) Si tronca la risposta ad N+1 campioni (lunghezza del filtro)

- e) Si applica una finestra per smorzare l'effetto del troncamento
- f) Si verifica che effetti ha avuto in frequenza su  $H(k)$  il troncamento e la finestatura

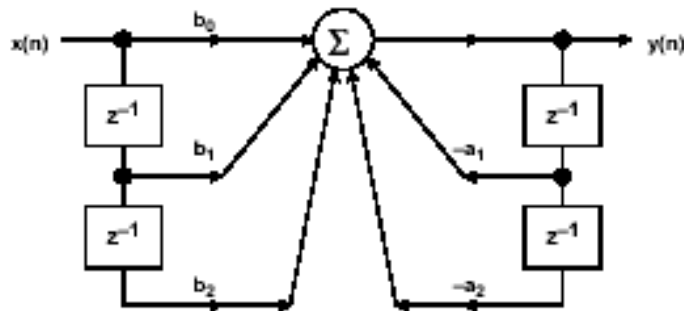
Anche per i filtri digitali è possibile ottenere filtri passa-alto e passa-banda da filtri passa-basso.

### FILTRI IIR (INFINITE IMPULSE RESPONSE)

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^K a(k)y(n-k)$$

I filtri IIR hanno sia i coefficienti  $b(k)$  che gli  $a(k)$  diversi da 0  
 Si utilizza una formula ricorsiva che sfrutta le uscite passate per calcolare il nuovo campione dell'uscita

#### HARDWARE IMPLEMENTATION OF SECOND-ORDER IIR FILTER (BIQUAD) DIRECT FORM 1



■  $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$

■  $y(n) = \sum_{k=0}^M b_kx(n-k) - \sum_{k=1}^N a_ky(n-k)$       ■  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_kz^{-k} \text{ (Zeros)}}{1 + \sum_{k=1}^N a_kz^{-k} \text{ (Poles)}}$

#### Caratteristiche:

- Si basa una formula ricorsiva: gli errori di rappresentazione dei coefficienti e all'aritmetica finita si propagano
- La risposta impulsiva ha durata infinita
- Potenzialmente instabili
- Fase non lineare
- Più efficienti dei FIR (computazionalmente)
- Utilizzati per duplicare le risposte dei filtri analogici
- Usualmente implementati come cascate di filtri (biquad) del secondo ordine (per problemi di propagazione degli errori)

### ALCUNI METODI DI PROGETTO



Trasformazioni delle funzioni di trasferimento dei filtri analogici, dal dominio s (continuo) al dominio z (discreto)

1. Impulse response invariant transformation
2. trasformazione bilineare

1. Impulse response invariant transformation
  - a) data una risposta per un filtro analogico  $H(s)$
  - b) si antitrasformi  $H(s)$  passando ad  $h(t)$
  - c) si ottiene  $H(z)$  dai campioni di  $h(t)$n.b. si devono prendere in considerazione gli effetti dell'aliasing
2. trasformazione bilineare
  - a) si utilizza la trasformata bilineare che mappa il dominio s in z

$$S = l \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = l \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{1 + e^{-j\omega T_s}}$$

$$l = \cot(\pi f_s)$$